UNIVERSIDADE DE LISBOA
FACULDADE DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Estudo de equações e sistemas de equações elípticos não lineares com expoente crítico em $\mathbb{R}^2$

Jorge Miguel Campilho Fragoso

Mestrado em Matemática

Dissertação orientada por:
Prof. Dra. Ana Rute Domingos

2018

Resumo

Nesta dissertação expõe-se o estudo da existência e multiplicidade de soluções para uma classe de equações elípticas não homogéneas da forma

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h(x),\ \ x \in \mathbb{R}^2,$$

onde a não linearidade $f(s)$ pode ter crescimento crítico exponencial no sentido dado pela desigualdade de Trudinger-Moser. Apresentam-se resultados obtidos por F. Albuquerque, C. Alves e E. Medeiros, em [5], de existência de duas soluções não triviais recorrendo a técnicas variacionais, à desigualdade de Trudinger-Moser, e a um teorema de minimax.

Também é exposto o estudo da existência e multiplicidade de soluções para uma classe de sistemas de equações elípticas não lineares com peso, do tipo gradiente, da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = Q(|x|)f(u,v), \\ -\Delta v + V(|x|)v = Q(|x|)g(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

onde, mais uma vez, se permite que f e g possam ter crescimento crítico exponencial no sentido anterior, e onde os pesos radiais V e Q podem ser ilimitados ou com decaimento para zero. Apresentam-se resultados obtidos por F. Albuquerque em [2], de existência e multiplicidade de soluções recorrendo outra vez a técnicas variacionais, a uma modificação da desigualdade de Trudinger-Moser, e a um teorema de minimax simétrico.

Palavras-chave: desigualdade de Trudinger-Moser, espaços de Sobolev com peso, métodos variacionais, potenciais radiais, equações de Schrödinger não-lineares.

Abstract

In this work, we present the study of the existence and multiplicity of solutions for a class of nonhomogeneous elliptic equations of the form

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h(x),\ x \in \mathbb{R}^2$$

where the nonlinear term $f(s)$ may have critical exponential growth in the sense given by the Trudinger-Moser inequality. The existence of two nontrivial solutions, obtained by F. Albuquerque, C. Alves and E. Medeiros in [5], is presented using variational techniques, a Trudinger-Moser inequality and a minimax theorem.

We also present the study of the existence and multiplicity of solutions for a class of gradient-type systems of the form

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = Q(|x|)f(u,v), \\ -\Delta v + V(|x|)v = Q(|x|)g(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

where the non linear terms f and g, may have critical exponential growth in the previous sense, and the radially symmetric potentials V and Q may be unbounded or decaying to zero. The existence and multiplicity of solutions, obtained by F. Albuquerque in [2], are presented using once again variational techniques, a modified Trudinger-Moser inequality, and a symmetric minimax theorem.

Keywords: Trudinger-Moser inequality, weighed Sobolev spaces, variational methods, radial potentials, nonlinear Schrödinger equations.

Conteúdo

Notações

- $C = C(\alpha, \beta, a, b, c, d, ...)$ denota uma constante positiva dependente dos valores $\alpha, \beta, a, b, c, d, ...$;
- B_r denota a bola aberta em $\mathbb{R}^2$ de centro na origem e raio $r > 0$; $B_R \setminus B_r$ denota o anel de raio interior r e raio exterior R;
- $\overline{A}$ denota a aderência de A;
- Para qualquer $A \subset \mathbb{R}^2$, A^c denota o complementar de A;
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto A;
- *q.t.*: abreviação de *quase todo* para designar em quase todo o ponto, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula;
- $(PS)_c$ denota a condição de Palais-Smale no nível c;
- $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$ denota o gradiente da função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
- $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ denota o Laplaciano de u;
- X' denota o dual topológico do espaço de Banach X;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par de dualidade entre X' e X;
- $\rightharpoonup$ e $\to$ denotam convergência fraca e forte em X, respectivamente;
- $\operatorname{supp}(u)$ denota o suporte de u;
- $p \gg q$ significa que o número p é muito maior que o número q;
- $f(s) = o(g(s))$ quando $s \to 0$ significa que $\displaystyle\lim_{s \to 0} \frac{f(s)}{g(s)} = 0$;
- $o_n(1)$ denota uma sucessão de números reais que converge para 0 quando $n \to \infty$;

- $f(s) = O(g(s))$ quando $s \to \infty$ significa que existem $M > 0$ e s_0 tais que $|f(s)| \leqslant M|g(s)|$ para todo $s \geqslant s_0$;
- $\square$ indica o fim de uma demonstração;
- $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{1/p}$ para $1 \leqslant p < \infty$;
- $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_\infty = \inf\{C \geqslant 0 : |u(x)| \leqslant C \text{ q.t. } x \in \mathbb{R}^2\}$;
- $\|u\|_{W^{k,p}} = \|u\|_{k,p} = \left(\sum_{i=0}^k \|D^i u\|_p\right)^{1/p}$;
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ denota o conjunto de funções de classe C^∞ de suporte compacto;
- $C_{0,rad}^\infty(\mathbb{R}^2) = \{u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) : \text{u é radial}\}$;
- $D_{rad}^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ denota o fecho de $C_{0,rad}^\infty(\mathbb{R}^2)$ relativamente à norma $\|\nabla u\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 \, dx\right)^{1/2}$;
- $C^{k,p}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : D^k u \text{ é } \gamma\text{-Hölder contínua}\}$
- $L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{u é mensuravel e } \|u\|_p < \infty\}$;
- $L_{loc}^1(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{u é mensuravel e } |u|_K \in L^1(K),\ \forall\, K \subset \Omega \text{ compacto}\}$;
- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \text{u é mensuravel e } \|u\|_\infty < \infty\}$;
- $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\gamma u \in L^p(\Omega),\ \forall\, |\gamma| \leqslant k\}$ onde γ é um multi-índice;
- $W_0^{k,p}(\Omega)$ denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ relativamente à norma $\|\cdot\|_{k,p}$;
- $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$;
- $H_0^k(\Omega)$ denota o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ relativamente à norma $\|\cdot\|_{k,2}$.

Introdução

No ano lectivo 2016-2017, no âmbito da disciplina *Seminário* do Mestrado em Matemática, foi apresentado um trabalho baseado no artigo [12] de J. do Ó, E. Medeiros e U. Severo, onde se prova a existência de pelo menos duas soluções fracas não triviais para o problema:

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h(x),\ x \in \mathbb{R}^2, \tag{0.1}$$

onde o termo não linear $f(s)$ pode ter crescimento crítico exponencial num sentido a precisar. Nesta tese pretende-se apresentar o estudo aprofundado de (0.1) com $h \equiv 0$, que faz a extensão à seguinte classe de sistemas elípticos não lineares que foi feita por F. Albuquerque em [2], e verificando a sua solvabilidade:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = Q(|x|)f(u,v), \\ -\Delta v + V(|x|)v = Q(|x|)g(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{0.2}$$

onde f e g também podem ter crescimento crítico exponencial num sentido a precisar. Estes problemas relacionam-se com problemas da física matemática, em particular, porque soluções de (0.1) e (0.2) fornecem soluções de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta\psi + W(x)\psi - g(|\psi|)\psi - e^{i\lambda t}h(x),\ x \in \mathbb{R}^2,$$

e soluções de ondas estacionárias para o sistema de Schrödinger não linear

$$\begin{cases} i\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\Delta\phi + W(x)\phi - Q(|x|)\xi(|\phi|)\phi, \\ i\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\Delta\psi + W(x)\psi - Q(|x|)\xi(|\psi|)\psi,\ x \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

respectivamente.

Para se mostrar a existência de soluções para os problemas (0.1) e (0.2), usam-se métodos variacionais. Nas técnicas usadas associa-se ao problema um funcional, que no caso (0.1) é

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu\, dx,$$

e usam-se teoremas de minimax, como o Teorema da Passagem da Montanha (cf. Teorema A.2.3), para encontrar pontos críticos do funcional I, que correspondem a soluções fracas de (0.1). Ora, uma das dificuldades do estudo destes problemas prende-se com o facto de se trabalhar em todo o $\mathbb{R}^2$ (domínio ilimitado), o que acarreta problemas de compacidade. O tipo de crescimento das não linearidades trás novas dificuldades que são ultrapassadas pelo uso da seguinte desigualdade, chamada desigualdade de Trudinger-Moser:

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha u^2}\, dx \begin{cases} \leqslant C|\Omega|, \text{ se } \alpha \leqslant 4\pi, \\ = \infty, \text{ se } \alpha > 4\pi. \end{cases}$$

Já que se admite que sejam limitadas para exponenciais do tipo $e^{\alpha u^2}$. Ora, o estudo deste tipo de problemas tem evoluído ao longo do tempo, e de forma a dar uma maior diversidade ao tipo de problemas estudados, foram precisas versões adequadas da desigualdade de Trudinger-Moser, para controlar o crescimento crítico das não linearidades nos diversos casos.

De facto, usando a desigualdade de Trudinger-Moser para domínios limitados (cf. Teorema 1.2.1), estabelecida em 1971 ([17]); Figueiredo, Miyagaki e Ruf, em 1995 ([11]), realizaram o estudo de um problema análogo a (0.1), em que f tem um crescimento de um tipo exponencial no sentido da desigualdade de Trudinger-Moser. Em 2007, Adimurthi e Sandeep, em [1] estabeleceram uma desigualdade de Trudinger-Moser com pesos singulares (cf. Teorema 1.4.1), e fizeram ainda o estudo do problema do tipo (0.1) com um termo não linear com crescimento crítico no sentido anterior e com um peso singular. Mais tarde, em 2008 ([12]), do Ó, Medeiros e Severo, aproveitaram a desigualdade de Trudinger-Moser em domínios ilimitados (cf. Teorema 1.3.1) estabelecida por Ruf em 2005 ([19]) para estudar a equação (0.1). Em 2014, Albuquerque, Alves e Medeiros em [4], aproveitaram o trabalho de Su, Wang e Willem em 2007 ([22]) onde é estabelecida uma desigualdade de Trudinger-Moser com pesos radiais (cf. Teorema 3.2.1), para estudarem uma classe de equações do tipo (0.1) com potenciais radiais. Ainda em 2014, Albuquerque, em [2], utiliza estes últimos resultados para estudar o sistema (0.2). Estes dois últimos trabalhos integram a sua tese de doutoramento em ([3]).

A tese está estruturada da seguinte forma:

O Capítulo 1 é dedicado às desigualdades do tipo Trudinger-Moser em domínios limitados ([17]) e ilimitados ([19]), e de Trudinger-Moser com pesos singulares ([1]), que são ferramentas fundamentais para o estudo dos problemas dos Capítulos 2 e 3 respectivamente.

No Capítulo 2 é abordado detalhadamente o artigo [12]. As ferramentas principais são: o Teorema da Passagem da Montanha (cf. Teorema A.3.3) e o Princípio Variacional de Ekeland (cf. Teorema A.3.1). Na última secção deste capítulo, deduzem-se ainda algumas características das soluções encontradas, tais como o sinal e a energia das mesmas.

No Capítulo 3 faz-se o estudo do sistema (0.2), baseado no artigo [2]. Dada a natureza do problema, trabalha-se em espaços com peso (cf. Definições 3.1.1 e 3.1.2), e estabelece-se uma desigualdade de Trudinger-Moser nesses mesmos espaços. Adaptando a estratégia usada no Capítulo 2 prova-se a existência de soluções para o problema (0.1). Prova-se ainda a existência de múltiplas soluções para o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = \lambda Q(|x|)f(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^2, \\ -\Delta v + V(|x|)v = \lambda Q(|x|)g(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{0.3}$$

onde λ é um parâmetro positivo, no caso em que f e g são funções ímpares.

No Apêndice reúnem-se algumas definições e resultados utilizados durante a tese, tendo-se optado pela inclusão de algumas demonstrações por terem sido parte integrante do estudo para a elaboração desta dissertação.

1. Desigualdades do tipo Trudinger-Moser

1.1. Motivação

Considere-se um domínio limitado Ω de $\mathbb{R}^N$ com $N \geqslant 3$. Sabe-se que, pelo Teorema das Imersões de Sobolev (cf. Teorema A.1.1), a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua para todo $1 \leqslant p \leqslant 2^* = 2N/(N-2)$. Este facto significa que o crescimento máximo que uma função pode ter em $H_0^1(\Omega)$ é do tipo polinomial com expoente p, no seguinte sentido

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega |u|^p \, dx < +\infty, \qquad \text{para} \qquad 1 \leqslant p \leqslant 2^*, \tag{1.1}$$

e significa ainda que, para $p > 2^*$, o supremo é infinito. O expoente crítico 2^* é assim a linha de divisão entre a finitude e infinitude de (1.1) em dimensão $N \geqslant 3$. Em dimensão dois, tem-se que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, $\forall\, p \geqslant 1$, pelo que se coloca a questão de saber se existe uma fronteira no que ao tipo de crescimento das funções diz respeito e, em caso afirmativo, qual será. Substituindo N por 2 na expressão $\frac{2N}{N-2}$, obtém-se $2^* = \infty$, pelo que se levanta então a questão: $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$?

Ora, considerando $N = 2$, $\Omega = B_1$ e $u(x) = \log(1 - \log|x|)$, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx &= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{d}{dr} \log(1 - \log r) \right)^2 r \, dr = 2\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{1 - \log r} \frac{-1}{r} \right)^2 r \, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{(1 - \log r)^2} \frac{1}{r} \, dr = 2\pi \left[\frac{1}{1 - \log r} \right]_0^1 < \infty,\end{aligned}$$

mas

$$\sup_{x \in B_1} \log(1 - \log|x|) = \infty,$$

donde concluímos que $u \in H_0^1(\Omega)$ mas $u \notin L^\infty(\Omega)$, logo a imersão não é válida.

Pretende-se então procurar uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de *crescimento maximal* e, tal que, dado $u \in H_0^1(\Omega)$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, limitado, se tenha

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega g(u)\, dx < +\infty.$$

N.S. Trudinger prova, em [23], que existe uma função nas condições anteriores e que tem crescimento exponencial. Mais precisamente, Trudinger desenvolveu a função exponencial em série de potências e reduziu o problema a mostrar que uma série de normas de L^m, $m \in \mathbb{R}$, é finita, controlando as constantes da injecção $W_0^{1,2} \subset L^m$. Daqui, conseguiu limitar o integral $\int_\Omega e^{\alpha u^2}\, dx$ por uma constante independente de u, com u na bola unitária $\|\nabla u\|_2 \leqslant 1$ de $H_0^1(\Omega)$, para alguns valores positivos da constante α. J. Moser, em [17], prova e aprimora os mesmos resultados, obtendo o maior valor possível para o expoente α, mostrando que a limitação do supremo do integral por uma constante é possível para $\alpha \leqslant 4\pi$, mas não para $\alpha > 4\pi$ fazendo uso da simetrização de Schwarz (cf. Definição A.2.1). O resultado que estabelece esta propriedade é conhecido como a Desigualdade de Trudinger-Moser.

1.2. Desigualdade de Trudinger-Moser

Enuncia-se assim o resultado mais fino estabelecido por Moser ([17]).

Teorema 1.2.1. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$. Para todo $\alpha > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, $e^{\alpha u^2} \in L^1(\Omega)$. Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha u^2}\, dx \begin{cases} \leqslant C|\Omega|, & se\ \alpha \leqslant 4\pi, \\ = \infty, & se\ \alpha > 4\pi. \end{cases} \tag{1.2}$$

À desigualdade (1.2) chama-se Desigualdade de Trudinger-Moser.

Demonstração. A demonstração deste teorema faz uso da simetrização de Schwarz (cf. Definição A.2.1), onde se associa à função u, a função radialmente simétrica u^*, tal que, $|\{x \in B_R : u^*(x) > c\}| = |\{x \in \Omega : u(x) > c\}|$ para todo $c \geqslant 0$. Tendo-se portanto, para $f \in C(\mathbb{R})$, $\int_{B_R} f(u^*)\, dx = \int_\Omega f(u)\, dx$ com $|\Omega| = |B_R|$ (cf. A.2), o que garante, por construção, que $\int_{B_R} e^{u^{*2}(x)}\, dx = \int_\Omega e^{u^2(x)}\, dx$. Tem-se também, pela desigualdade de

Pólya-Szegö ([14], cf. A.2), $\int_{B_R} |\nabla u^*|^2\,dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$, pelo que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega e^{\alpha u(x)^2}\,dx \leqslant \sup_{\|\nabla u^*\|_2 \leqslant 1} \int_{B_R} e^{\alpha u^*(|x|)^2}\,dx.$$

Assim, é suficiente considerar o caso radial.
Fazendo a mudança de variavél $r = |x| = Re^{-t/2}$, e definindo $w(t) = \sqrt{4\pi}u^*(r)$, note-se que:

$$w : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ w(0) = 0,\ w'(+\infty) = 0.$$

Visto que $\frac{dr}{dt} = -\frac{R}{2}e^{-t/2}$, $r \to 0$ quando $t \to +\infty$, tem-se que $w'(t) = -\sqrt{4\pi}u^{*'}(r)\frac{R}{2}e^{-t/2}$ que tende para 0 quando $t \to +\infty$. Pode-se escrever portanto $u^{*'}(r) = \frac{-2}{R}e^{t/2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}w'(t)$.
Do caso radial e das mudanças de variável, tem-se então que

$$\begin{aligned}
\|\nabla u^*\|_2^2 &= \int_{B_R} |\nabla u^*|^2\,dx = 2\pi \int_0^R (u^{*'}(r))^2 r\,dr \\
&= 2\pi \int_\infty^0 -\frac{R}{2}e^{-t/2}\left(\frac{-2}{R}e^{t/2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}w'(t)\right)^2 Re^{-t/2}\,dt \\
&= -\int_\infty^0 (w'(t))^2\,dt = \int_0^\infty (w'(t))^2\,dt
\end{aligned}$$

e ainda,

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} e^{\alpha u^*(|x|)^2}\,dx &= 2\pi \int_0^R e^{\alpha u^*(r)^2} r\,dr \\
&= 2\pi \int_\infty^0 e^{\frac{\alpha}{4\pi}w(t)^2} Re^{-t/2}\frac{-R}{2}e^{-t/2}\,dt = \pi R^2 \int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{4\pi}w(t)^2 - t}\,dt.
\end{aligned}$$

Notando que em $\mathbb{R}^2$, $|B_R| = \pi R^2$, reduz-se assim o problema a majorar o valor

$$\sup_{\int_0^\infty (w')^2\,dt \leqslant 1} |B_R| \int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{4\pi}w(t)^2 - t}\,dt. \tag{1.3}$$

Separa-se a demonstração em três casos.
Caso 1: $\alpha < 4\pi$. Seja $w \in C^1([0,\infty))$, tal que $\int_0^\infty w'(t)^2\,dt \leqslant 1$. Da desigualdade de Hölder vem

$$w(t) = \int_0^t w'(s)\,ds \leqslant t^{1/2}\left(\int_0^t w'(s)^2\,ds\right)^{1/2} \leqslant t^{1/2}. \tag{1.4}$$

Então,

$$\int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{4\pi}w(t)^2-t}\,dt \leqslant \int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{4\pi}t-t}\,dt = \int_0^\infty e^{(\frac{\alpha}{4\pi}-1)t}\,dt = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{4\pi}} < \infty.$$

Logo,

$$\sup_{\int_0^\infty (w')^2\,dt\leqslant 1} |B_R| \int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{4\pi}w(t)^2-t}\,dt \leqslant \frac{1}{1-\frac{\alpha}{4\pi}}|B_R| = \frac{1}{1-\frac{\alpha}{4\pi}}|\Omega| < \infty.$$

Caso 2: $\alpha > 4\pi$. Considere-se a chamada sucessão de Moser

$$w_n(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{n}}, \ 0 \leqslant t \leqslant n \\ \sqrt{n}, \ n \leqslant t. \end{cases}$$

Ora

$$\int_0^\infty w_n'(t)^2\,dt = \int_0^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 dt = 1,$$

e

$$\int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{4\pi}w_n^2-t}\,dt \geqslant \int_n^\infty e^{\frac{\alpha}{4\pi}n-t}\,dt = e^{(\frac{\alpha}{4\pi}-1)n} \to \infty, \qquad n \to +\infty.$$

Logo, neste caso, o supremo em questão é $+\infty$.

Caso 3: $\alpha = 4\pi$. Este é o caso mais delicado. Moser observa que em (1.4) se pode ter a igualdade $w(t_1) = t_1^{1/2}$ para algum t_1 só se w for da forma $t_1^{1/2}\eta(t/t_1)$, com $\eta(s) = \min(s,1)$. Daqui, Moser mostra que se $t^{-1/2}w(t)$ estiver perto o suficiente de um, então $w(t)$ tem de estar perto de uma das funções acima. Assim, observando que a sucessão de Moser $w_n(t)$ é precisamente do tipo $n^{1/2}\eta(t/n)$, tem-se que se $v_n(t)$, $t \in (0,+\infty)$ for uma sucessão tal que

$$\int_0^\infty v_n^2\,dt = 1 \quad \text{e} \quad \|v_n\|_\infty \to +\infty,$$

então (v_n) pode ser aproximada pela sucessão de Moser, (w_n). Para $\alpha = 4\pi$ tem-se

$$\int_0^\infty e^{w_n^2-t}\,dt = \int_0^n e^{\frac{t^2}{n}-t}\,dt + \int_n^\infty e^{n-t}\,dt. \tag{1.5}$$

Ora, o segundo integral de (1.5) é igual a 1. Quanto ao primeiro integral, fazendo a mudança de variável $s = \frac{t}{n}$, tem-se

$$\int_0^n e^{\frac{t^2}{n}-t}\,dt = \int_0^1 e^{n(s^2-s)}n\,ds = 2\int_0^{1/2} e^{n(s^2-s)}n\,ds,$$

onde usa-se o facto de $e^{n(s^2-s)}$ ser simétrica em relação à recta $s = 1/2$. Tendo em conta que para cada $\varepsilon > 0$ se tem

$$s^2 - s \leqslant (\varepsilon - 1)s, \quad \text{para} \quad 0 \leqslant s \leqslant \varepsilon,$$

tem-se então que

$$\int_0^{1/2} e^{n(s^2-s)} n\, ds = \int_0^{\varepsilon} e^{n(s^2-s)} n\, ds + \int_{\varepsilon}^{1/2} e^{n(s^2-s)} n\, ds. \tag{1.6}$$

Ora, do primeiro integral de (1.6), tem-se que

$$\int_0^{\varepsilon} e^{n(s^2-s)} n\, ds \leqslant \int_0^{\varepsilon} e^{n(\varepsilon-1)s} n\, ds = \frac{e^{n(\varepsilon-1)\varepsilon}}{\varepsilon - 1} - \frac{1}{\varepsilon - 1} = \frac{1}{1-\varepsilon} + o_n(1), \quad \text{se } \varepsilon < 1.$$

Já quanto ao segundo integral, tem-se que

$$\int_{\varepsilon}^{1/2} e^{n(s^2-s)} n\, ds \leqslant \int_{\varepsilon}^{1/2} e^{n(\varepsilon-1)s} n\, ds = \frac{e^{(\varepsilon-1)n/2}}{\varepsilon - 1} - \frac{e^{(\varepsilon-1)n\varepsilon}}{\varepsilon - 1} = o_n(1)., \quad \text{se } \varepsilon < 1$$

Logo, voltando a (1.6), tem-se que $\displaystyle\int_0^{1/2} e^{n(s^2-s)} n\, ds \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} + o_n(1) \to 1$, quando $\varepsilon \to 0$. Como $e^{n(s^2-s)} n$ é crescente, logo o integral em (1.5) é $\leqslant 2$, o que completa a demonstração do Teorema 1.2.1. $\square$

1.3. Desigualdade do tipo Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^2$

Nesta secção introduz-se a Desigualdade do tipo Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^2$, obtida por B. Ruf ([19]) em 2005, isto é, mais de 30 anos depois de estabelecida a desigualdade de Trudinger-Moser para conjuntos limitados. Esta desigualdade permite trabalhar em problemas como os casos expostos nesta tese em que o domínio é ilimitado.

A desigualdade de Trudinger-Moser diz que para funções $u \in H_0^1(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado, tais que $\|\nabla u\|_2 \leqslant 1$, é possível majorar o integral $\displaystyle\int_{\Omega} e^{4\pi u^2}\, dx$ por uma constante C que apenas depende da medida de Ω, e que, tende para infinito quando $|\Omega| \to \infty$. Isto significa que a desigualdade de Trudinger-Moser não é válida para domínios ilimitados, em particular, não é válida para $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Substituindo a norma de Dirichlet ($\|\nabla u\|_2$), pela norma de Sobolev *standard* no caso em que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio arbitrário,

$$\|u\|_{1,2} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx \right)^{1/2}, \tag{1.7}$$

Ruf mostra que o supremo de $\displaystyle\int_\Omega e^{4\pi u^2} - 1\, dx$, em $\|u\|_{1,2}$, é limitado por uma constante independente do domínio Ω, mais precisamente, estabelece o seguinte resultado:

Teorema 1.3.1. *([19]) Existe uma constante $d > 0$ tal que para qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$*

$$\sup_{\|u\|_{1,2} \leqslant 1} \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)\, dx \begin{cases} \leqslant d, & se\ \alpha \leqslant 4\pi, \\ = \infty, & se\ \alpha > 4\pi. \end{cases} \tag{1.8}$$

Demonstração. Observe-se que para $\alpha \leqslant 4\pi$,

$$\sup_{\|u\|_{1,2} \leqslant 1} \int_\Omega (e^{\alpha u^2} - 1)\, dx \leqslant \sup_{\|u\|_{1,2} \leqslant 1} \int_\Omega (e^{4\pi u^2} - 1)\, dx \leqslant \sup_{\|u\|_{1,2} \leqslant 1} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1)\, dx \tag{1.9}$$

visto que qualquer função $u \in H_0^1(\mathbb{R}^2)$ pode ser estendida por zero fora de Ω, obtendo-se assim uma função em $(H^1(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_{1,2})$. Logo, para provar (1.8), basta provar que existe d tal que

$$\sup_{\|u\|_{1,2} \leqslant 1} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1)\, dx \leqslant d. \tag{1.10}$$

Tal como na demonstração do Teorema 1.2.1, usa-se a técnica de simetrização de Schwarz (cf. Definição A.2.1), pelo que é suficiente provar (1.10) para funções radialmente simétricas $u(x) = u(|x|)$.

Assim, suponha-se que u em (1.10) é radialmente simétrica e não crescente. Tome-se $r_0 > 0$, e escreva-se o integral em (1.10) da seguinte forma

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi u^2} - 1)\, dx = \int_{|x| \leqslant r_0} (e^{4\pi u^2} - 1)\, dx + \int_{|x| \geqslant r_0} (e^{4\pi u^2} - 1)\, dx. \tag{1.11}$$

O segundo integral pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geqslant r_0} (e^{4\pi u^2} - 1)\, dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{|x| \geqslant r_0} \frac{(4\pi)^k u^{2k}}{k!}\, dx \\ &= \int_{|x| \geqslant r_0} 4\pi u^2\, dx + \sum_{k=2}^{\infty} \int_{|x| \geqslant r_0} \frac{(4\pi)^k u^{2k}}{k!}\, dx. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ora, do Lema Radial (cf. Lema A.2.1), tem-se

$$|u(r)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}}\|u\|_2 \frac{1}{r} \quad \text{para todo} \quad r > 0.$$

Mudando para coordenadas polares e utilizando o Lema Radial, tem-se para $k \geqslant 2$ que

$$\int_{|x|\geqslant r_0} |u|^{2k}\,dx = 2\pi \int_{r_0}^{\infty} |u|^{2k} r\,dr \leqslant \|u\|_2^{2k} \frac{2}{\pi^{k-1}} \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{r^{2k}} r\,dr = \frac{1}{k-1}\|u\|_2^2 \left(\frac{\|u\|_2^2}{\pi r_0^2}\right)^{k-1}.$$

Logo, voltando a (1.12), tem-se

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant r_0} (e^{4\pi u^2} - 1)\,dx &\leqslant 4\pi\|u\|_2^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(4\pi)^k}{k!} \frac{1}{k-1}\|u\|_2^2 \left(\frac{\|u\|_2^2}{\pi r_0^2}\right)^{k-1} \\ &\leqslant 4\pi\|u\|_2^2 + 4\pi\|u\|_2^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!(k-1)} \left(\frac{4\|u\|_2^2}{r_0^2}\right)^{k-1} \leqslant C(r_0),\end{aligned}$$

pois $\|u\|_2 = \|u\|_{1,2} - \|\nabla u\|_2 \leqslant 1$. Para estimar o primeiro integral em (1.11), seja

$$v(r) = \begin{cases} u(r) - u(r_0), & 0 \leqslant r \leqslant r_0, \\ 0, & r \geqslant r_0. \end{cases}$$

Ora, pelo Lema Radial, tem-se

$$\begin{aligned} u^2(r) &= v^2(r) + 2v(r)u(r_0) + u^2(r_0) \\ &\leqslant v^2(r) + v^2(r)u^2(r_0) + 1 + u^2(r_0) \\ &\leqslant v^2(r) + v^2(r)\frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^2 + 1 + \frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^2 \\ &\leqslant v^2(r)\left(1 + \frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^2\right) + d(r_0) \end{aligned} \tag{1.13}$$

onde se utilizou a desigualdade $2ab \leqslant a^2b^2 + 1$ que vem do facto de $(ab-1)^2 = a^2b^2 - 2ab + 1 \geqslant 0$. Logo

$$u(r) \leqslant v(r)\left(1 + \frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^2\right)^{1/2} + d^{1/2}(r_0) =: w(r) + d^{1/2}(r_0).$$

Ora,

$$\int_{B_{r_0}} |\nabla v|^2\,dx = \int_{B_{r_0}} |\nabla u|^2\,dx = \|u\|_{1,2} - \|u\|_2^2 \leqslant 1 - \|u\|_2^2$$

portanto,

$$\int_{B_{r_0}} |\nabla w|^2\,dx = \int_{B_{r_0}} \left|\nabla v \left(1+\frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^2\right)^{1/2}\right|^2 dx = \left(1+\frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^2\right)\int_{B_{r_0}} |\nabla v|^2\,dx$$
$$\leqslant \left(1+\frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^2\right)(1-\|u\|_2^2) = 1+\frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^2 - \|u\|_2^2 - \frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^4 \leqslant 1, \text{ desde que } r_0^2 \geqslant \frac{1}{\pi}.$$

Observe-se que nesta última estimativa a mudança de norma foi essencial, pois caso não se tivesse utilizado a norma $\|\cdot\|_{1,2}$, a estimativa que permite concluir o resultado não seria válida. Note-se que se teria $\displaystyle\int_{B_{r_0}} |\nabla v|^2\,dx \leqslant 1$, e consequentemente, $\displaystyle\int_{B_{r_0}} |\nabla w|^2\,dx \leqslant \|u\|_2^2 + \frac{1}{\pi r_0^2}\|u\|_2^4$. Portanto, não seria possível verificar que $\int_{B_{r_0}} |\nabla w|^2\,dx \leqslant 1$, que é necessário para concluir o resultado.

Como de (1.13), $u^2(r) \leqslant w^2(r) + d(r_0)$, tem-se

$$\int_{|x|\leqslant r_0} (e^{4\pi u^2}-1)\,dx \leqslant e^{4\pi d(r_0)} \int_{|x|\leqslant r_0} e^{4\pi w^2}\,dx - |B_{r_0}| \leqslant e^{4\pi d(r_0)} C(|B_{r_0}|).$$

A última desigualdade justifica-se pelo facto de $w \in H_0^1(B_{r_0})$ e $\int_{B_{r_0}} |\nabla w|^2\,dx \leqslant 1$ e, portanto, pode-se usar o Teorema 1.2.1, donde o resultado segue.

Para provar que 4π é o valor "fronteira", considere-se $\rho > 0$ tal que $B_\rho \subset \Omega$ e a sucessão de Moser modificada,

$$m_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\log n)^{1/2}\left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right)^{1/2}, & 0 \leqslant |x| \leqslant \rho/n \\ \frac{\log(\rho/|x|)}{(\log n)^{1/2}}\left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right)^{1/2}, & \frac{\rho}{n} \leqslant |x| \leqslant \rho, \\ 0, & |x| \geqslant \rho. \end{cases}$$

Ora, mudando para coordenadas polares, tem-se

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla m_n(x)|^2\,dx &= (\log n)^{-1}\left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right)\int_{\rho/n}^{\rho}\left(\frac{d}{dr}\log(\rho/r)\right)^2 r\,dr \\ &= (\log n)^{-1}\left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right)\int_{\rho/n}^{\rho}\frac{1}{r}\,dr = \left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right) \end{aligned}$$

e

$$\int_\Omega m_n(x)^2\,dx = \log n\left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right)\int_0^{\rho/n} r\,dr + (\log n)^{-1}\left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right)\int_{\rho/n}^{\rho}\log^2(\frac{\rho}{r})r\,dr$$
$$= \left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right)\left[\frac{\rho^2\log n}{n^2} + (\log n)^{-1}\frac{1}{4}\left[r^2(2\log^2(\frac{\rho}{r}) + 2\log(\frac{\rho}{r}) + 1)\right]_{\rho/n}^{\rho}\right]$$
$$= \left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right)\left[\frac{\rho^2}{4\log n} + \frac{\rho^2\log n}{2n^2} - \frac{\rho^2}{2n^2} - \frac{\rho^2}{4n^2\log n}\right],$$

donde sai

$$\|m_n\|_{1,2}^2 = \left(1-\frac{\rho^2}{4\log n}\right)\left[\frac{\rho^2}{4\log n} + \frac{\rho^2\log n}{2n^2} - \frac{\rho^2}{2n^2} - \frac{\rho^2}{4n^2\log n} + 1\right].$$

Logo, $\|m_n\|_{1,2}^2 \leqslant 1$ para n grande. Assim, tem-se

$$\sup_{\|u\|_{1,2}\leqslant 1}\int_\Omega (e^{\alpha u^2}-1)\,dx \geqslant \int_{B_\rho}(e^{\alpha m_n^2}-1)\,dx, \qquad \forall\, n$$
$$\geqslant 2\pi\int_0^{\rho/n}\left(e^{\frac{\alpha}{2\pi}\log n[1-\rho^2/(4\log n)]}-1\right)r\,dr = \left[2\pi\left(n^{\frac{\alpha}{2\pi}}e^{-\frac{\alpha\rho^2}{8\pi}}-1\right)\frac{r^2}{2}\right]_0^{\rho/n}$$
$$= 2\pi\left(n^{\frac{\alpha}{2\pi}}e^{-\frac{\alpha\rho^2}{8\pi}}-1\right)\frac{\rho^2}{2n^2} \to +\infty, \text{ quando } n\to\infty, \text{ se } \alpha > 4\pi,$$

o que prova, atendendo ao que já foi visto, que 4π é o valor "fronteira" de α, e conclui-se assim a demonstração do teorema. □

A desigualdade de Trudinger-Moser foi melhorada por P.L. Lions [15], que estabeleceu o seguinte lema num domínio Ω limitado:

Lema 1.3.1. *Seja (w_n) uma sucessão em $H_0^1(\Omega)$ com $\|\nabla w_n\|_2 = 1$ tal que (w_n) converge fracamente para $w_0 \neq 0$ em $H_0^1(\Omega)$. Então, para todo $0 < p < 4\pi(1-\|w_0\|_2^2)^{-1}$, tem-se*

$$\sup_n \int_\Omega e^{pw_n^2}\,dx < \infty.$$

De seguida, apresenta-se uma versão deste lema para $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Lema 1.3.2. *([12]). Seja (w_n) uma sucessão em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|w_n\|_{1,2} = 1$ e suponha-se que $(w_n) \rightharpoonup w_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, com $\|w_0\|_{1,2} < 1$. Então para todo $0 < p < 4\pi(1 -$*

$\|w_0\|_{1,2}^2)^{-1}$, *tem-se*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} (e^{pw_n^2} - 1)\, dx < \infty.$$

Demonstração. Como $w_n \rightharpoonup w_0$ e $\|w_n\|_{1,2} = 1$, conclui-se que

$$\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 = 1 - 2\langle w_n, w_0\rangle + \|w_0\|_{1,2}^2 \to 1 - \|w_0\|_{1,2}^2 < \frac{4\pi}{p}.$$

Logo, para n grande, tem-se $p\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 < \alpha < 4\pi$ para algum $\alpha > 0$. Escolhendo $q > 1$ perto de 1 e $\varepsilon > 0$ que satisfaçam $q(1+\varepsilon^2)p\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 < \alpha$, pelo Teorema 1.3.1, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} - 1\right] dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{qp(1+\varepsilon^2)\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 (\frac{w_n - w_0}{\|w_n - w_0\|_{1,2}})^2} - 1\right] dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\alpha(\frac{w_n - w_0}{\|w_n - w_0\|_{1,2}})^2} - 1\right] dx \leqslant C, \text{ pois } \alpha < 4\pi.
\end{aligned}$$

Além disso, como

$$pw_n^2 = p(w_n - w_0 + w_0)^2 = p[(w_n - w_0)^2 + 2w_0(w_n - w_0) + w_0^2] \leqslant p(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2 + p\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2}\right) w_0^2,$$

onde se usa o facto de $(\varepsilon a - \varepsilon^{-1} b)^2 \geqslant 0 \Rightarrow \varepsilon^2 a^2 + \varepsilon^{-2} b^2 \geqslant 2ab$, vem que, usando a desigualdade de Young modificada (ver mais abaixo), com $1/q + 1/r = 1$,

$$\begin{aligned}
e^{pw_n^2} - 1 &\leqslant (e^{p(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} e^{p(1+1/\varepsilon^2)w_0^2} - 1) \\
&\leqslant \frac{1}{q}(e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} - 1) + \frac{1}{r}(e^{rp(1+1/\varepsilon^2)w_0^2} - 1).
\end{aligned}$$

Nesta última desigualdade usa-se, para $a, b > 0$ e $1/q + 1/r = 1$, a desigualdade de Young modificada,

$$ab - 1 \leqslant \frac{1}{q}(a^q - 1) + \frac{1}{r}(b^r - 1).$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{pw_n^2} - 1)\, dx \leqslant \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} - 1)\, dx + \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{rp(1+1/\varepsilon^2)w_0^2} - 1)\, dx \leqslant C$$

para n grande, o que prova o lema. □

Termina-se esta secção com uma consequência da desigualdade de Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^2$, a qual precisa do lema que se segue

Lema 1.3.3. *[12] Sejam $\beta > 0$ e $r > 1$. Então para cada $\alpha > r$ existe uma constante positiva $C = C(\alpha)$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}^2$,*

$$\left(e^{\beta s^2} - 1\right)^r \leqslant C\left(e^{\alpha\beta s^2} - 1\right).$$

Em particular, se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ então $\left(e^{\beta u^2} - 1\right)^r \in L^1(\mathbb{R}^2)$.

Demonstração. Como $r > 1$, pela Regra de Cauchy, vem que

$$\lim_{s\to 0} \frac{(e^{\beta s^2} - 1)^r}{e^{\alpha\beta s^2} - 1} = \lim_{s\to 0} \frac{r(e^{\beta s^2} - 1)^{r-1}}{\alpha e^{\alpha\beta s^2}} = 0.$$

Por outro lado, tem-se

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{(e^{\beta s^2} - 1)^r}{e^{\alpha\beta s^2} - 1} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{e^{r\beta s^2}(1 - e^{-\beta s^2})^r}{e^{\alpha\beta s^2}(1 - e^{-\alpha\beta s^2})} = 0, \text{ pois } r < \alpha,$$

donde se conclui o lema. □

Proposição 1.3.1. *Sejam $\beta > 0$ e $q > 0$. Então a função $|u|^q(e^{\beta u^2} - 1)$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.*

Demonstração. Conjugando o Teorema 1.3.1, o Lema 1.3.3, e a desigualdade de Hölder, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^q(e^{\beta u^2} - 1)\,dx \leqslant \|u\|_{qs}^q \left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta u^2} - 1)^r\,dx\right)^{1/r} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha\beta u^2} - 1)\,dx\right)^{1/r} < +\infty,$$

onde r é tal que $1/r + 1/s = 1$ e $\alpha > r$. □

1.4. Desigualdade de Trudinger-Moser singular

Nesta secção apresenta-se a prova, estabelecida por Adimurthi e Sandeep em [1], de uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser com um peso singular num domínio Ω limitado de $\mathbb{R}^n$, com $n \geqslant 2$. De seguida apresenta-se a prova para o caso $n = 2$.

Teorema 1.4.1. *Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ contendo a origem e $u \in H_0^1(\Omega)$. Então para todo $\alpha > 0$ e $\beta \in [0, 2)$*

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\,dx < \infty. \tag{1.14}$$

Além disso,

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\, dx \begin{cases} \leqslant C \ se \ \frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\beta}{2} \leqslant 1 \\ = \infty \ se \ \frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\beta}{2} > 1 \end{cases} \tag{1.15}$$

Demonstração. Observe-se que para $\beta = 0$ tem-se a desigualdade de Trudinger-Moser, pelo que se vai apresentar a prova para $\beta \in (0, 2)$. Para provar (1.14) utiliza-se a desigualdade de Hölder e o Teorema 1.2.1. Sejam $t > 1$ tal que $\beta t < 2$ e $R > 0$ tal que $\Omega \subset B_R$, então

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\, dx &\leqslant \left(\int_\Omega e^{\frac{\alpha t}{t-1} u^2}\, dx \right)^{\frac{t-1}{t}} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{t\beta}}\, dx \right)^{\frac{1}{t}} \leqslant \left(\int_\Omega e^{\frac{\alpha t}{t-1} u^2}\, dx \right)^{\frac{t-1}{t}} \left(2\pi \int_0^R \frac{1}{r^{t\beta}} r\, dr \right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \left(\int_\Omega e^{\frac{\alpha t}{t-1} u^2}\, dx \right)^{\frac{t-1}{t}} \left(2\pi \frac{R^{2-t\beta}}{2 - t\beta} \right)^{\frac{1}{t}} < \infty. \end{aligned}$$

De forma a provar (1.15), no caso em que $\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\beta}{2} < 1$, considere-se $t > 1$ tal que

$$\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\beta t}{2} = 1.$$

Novamente pela desigualdade de Hölder e pelo Teorema 1.2.1, obtém-se

$$\begin{aligned} \sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^\beta}\, dx &\leqslant \sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \left(\int_\Omega e^{4\pi u^2}\, dx \right)^{\frac{\alpha}{4\pi}} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{\frac{2}{t}}}\, dx \right)^{\frac{\beta t}{2}} \\ &\leqslant \sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \left(\int_\Omega e^{4\pi u^2}\, dx \right)^{\frac{\alpha}{4\pi}} \left(2\pi \frac{R^{2-\frac{2}{t}}}{2 - \frac{2}{t}} \right)^{\frac{\beta t}{2}} \leqslant C|\Omega|. \end{aligned}$$

Para se estabelecer (1.15) no caso $\dfrac{\alpha}{4\pi} + \dfrac{\beta}{2} = 1$, considere-se $a := \dfrac{\alpha}{4\pi}$. Assim $\dfrac{\beta}{2} = 1 - a$ pelo que o objectivo é então provar que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_\Omega \frac{e^{a 4\pi u^2}}{|x|^{2(1-a)}}\, dx < \infty.$$

Ora, por simetrização, pode-se já considerar que Ω é a bola B_R centrada na origem, e que u é uma função radial positiva. Então,

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2\, dx = 2\pi \int_0^R (u'(r))^2 r\, dr \tag{1.16}$$

e

$$\int_{B_R} \frac{e^{a4\pi u^2}}{|x|^{2(1-a)}}\,dx = 2\pi \int_0^R e^{a4\pi u^2} r^{2a-1}\,dr. \tag{1.17}$$

Agora para tal u, defina-se uma função v da seguinte forma:

$$v(s) := a^{1/2} u(s^{1/a}) \text{ com } s \in [0, R^a].$$

Tem-se

$$v'(s) = a^{1/2}\frac{1}{a} s^{\frac{1}{a}-1} u'(s^{1/a}) = a^{-1/2} s^{\frac{1}{a}-1} u'(s^{1/a}).$$

Logo, fazendo a mudança de variável $r = s^{1/a}$, vem

$$\begin{aligned}\int_0^{R^a} (v'(s))^2 s\,ds &= \int_0^{R^a} a^{-1} s^{\frac{2}{a}-2} (u'(s^{1/a}))^2 s\,ds \\ &= \int_0^R a^{-1} r^{2-a} (u'(r))^2 r^{a-1} a\,dr = \int_0^R (u'(r))^2 r\,dr\end{aligned} \tag{1.18}$$

e

$$\frac{1}{a}\int_0^{R^a} e^{4\pi v^2(s)} s\,ds = \frac{1}{a}\int_0^{R^a} e^{a4\pi u^2(s^{1/a})} s\,ds = \int_0^R e^{a4\pi u(r)^2} r^{2a-1}\,dr. \tag{1.19}$$

Então, de (1.16) e (1.18), tem-se que $\|\nabla u\|_2 = \|\nabla v\|_2$, e de (1.17) e (1.19), obtém-se que

$$\int_{B_R} \frac{e^{a4\pi u^2}}{|x|^{2(1-a)}}\,dx = \frac{1}{a}\int_{B_{R^a}} e^{4\pi v^2}\,dx,$$

logo, pelo Teorema 1.2.1,

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_{B_R} \frac{e^{a4\pi u^2}}{|x|^{2(1-a)}}\,dx = \frac{1}{a} \sup_{\|\nabla v\|_2 \leqslant 1} \int_{B_{R^a}} e^{a4\pi v^2}\,dx \leqslant C.$$

Para provar o último caso, quando $\dfrac{\alpha}{4\pi} + \dfrac{\beta}{2} > 1$, escolha-se $R > 0$ tal que $B_R \subset \Omega$. Seja $(u_n(x))$ a sucessão de funções de Moser:

$$u_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\log n)^{1/2} & 0 \leqslant |x| \leqslant R/n \\ \frac{\log(R/|x|)}{(\log n)^{1/2}} & R/n \leqslant |x| \leqslant R \\ 0 & |x| > R. \end{cases} \tag{1.20}$$

Então, por cálculos análogos aos da demonstração do Teorema 1.3.1, tem-se

$$\int_{B_R} |\nabla u_n(x)|^2 \, dx = (\log n)^{-1} \int_{R/n}^{R} \left(\frac{d}{dr} \log(R/r) \right)^2 r \, dr = (\log n)^{-1} \int_{R/n}^{R} \frac{1}{r} \, dr = 1,$$

e

$$\int_{\Omega} \frac{e^{\alpha u_n^2}}{|x|^\beta} \, dx \geqslant e^{\alpha (2\pi)^{-1} \log n} \int_{B_{R/n}} \frac{1}{|x|^\beta} \, dx = n^{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{2\pi}{(2-\beta)} \left(\frac{R}{n} \right)^{2-\beta} = \frac{2\pi}{(2-\beta)} R^{2-\beta} n^{2(\frac{\alpha}{4\pi} + \frac{\beta}{2} - 1)}.$$

Logo, quando $\dfrac{\alpha}{4\pi} + \dfrac{\beta}{2} > 1$, e $n \to \infty$,

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leqslant 1} \int_{\Omega} \frac{e^{\alpha u_n^2}}{|x|^\beta} \, dx = \infty,$$

o que completa a demonstração do teorema. $\square$

2. Uma classe de equações não homogéneas com crescimento exponencial crítico em $\mathbb{R}^2$

2.1. Apresentação do problema e resultados preliminares

Neste capítulo considera-se o problema elíptico não homogéneo da forma

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) + h(x), \text{ em } \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

onde o termo não linear $f(s)$ pode ter um crescimento crítico por meio da desigualdade de Trudinger-Moser. Combinando métodos variacionais e a desigualdade de Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^2$, estabelece-se a existência de, pelo menos, duas soluções distintas para esta classe de equações, controlando o *tamanho* de h, e ainda resultados relativos ao sinal das soluções obtidas.

Vamos estudar o problema (2.1) considerando $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$, embora todos os resultados sejam válidos num contexto mais geral com $h \in H^{-1}(\mathbb{R}^2)$ (o dual topológico de $H^1(\mathbb{R}^2)$). Ao longo deste capítulo vão considerar-se as seguintes hipóteses para V:

(V_1) $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua e $V(x) \geqslant V_0 > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^2$;

(V_2) A função $[V(x)]^{-1}$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Considere-se o seguinte subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$:

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2\, dx < \infty \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, dx, \quad u, v \in E \tag{2.2}$$

ao qual se associa a norma $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$. Estabeleçam-se de seguida alguns resultados de imersão.

Lema 2.1.1. *Se* (V_1) *e* (V_2) *forem satisfeitas, então a imersão* $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ *é contínua e as imersões* $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ *são compactas para todo o* $1 \leqslant q < \infty$.

Demonstração. Ora, de (V_1) e (2.2), tem-se que

$$\begin{aligned}\|u\| &= \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx\right]^{1/2} \geqslant \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V_0 u^2)\, dx\right]^{1/2} \\ &\geqslant C\left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + u^2)\, dx\right]^{1/2} = C\|u\|_{1,2},\end{aligned}$$

onde $C = \min\{1, V_0\}$. Logo, a imersão $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ é contínua. Como a imersão $H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ é contínua, então $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ é contínua para todo o $2 \leqslant q < \infty$. Além disso, segue da condição (V_2) e da desigualdade de Hölder que

$$\|u\|_1 = \int_{\mathbb{R}^2} |u|\, dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x)^{-1}\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant C\|u\|.$$

Logo, as imersões $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ são contínuas para todo o $1 \leqslant q < \infty$.
Para provar que as imersões acima são compactas, tome-se uma sucessão $(u_n) \subset E$ tal que $\|u_n\| \leqslant C$. Sem perda de generalidade, pode-se supor que, passando a uma subsucessão, $u_n \rightharpoonup u$ em E e $u_n \to u$ em $L^q_{loc}(\mathbb{R}^2)$ para todo o $1 \leqslant q < \infty$.
De (V_2) tem-se que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $R > 0$ tal que

$$\left(\int_{|x|>R} V(x)^{-1}\, dx\right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Logo, por Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{|x|>R} |u_n - u|\, dx &\leqslant \left(\int_{|x|>R} V(x)^{-1}\, dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|u_n - u|^2\, dx\right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\int_{|x|>R} V(x)^{-1}\, dx\right)^{1/2} \|u_n - u\| \leqslant \varepsilon\|u_n - u\| \leqslant \varepsilon C.\end{aligned}$$

Como $u_n \to u$ em $L^1(B_R)$ e $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtém-se

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u|\, dx = 0.$$

Assim, a imersão $E \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^2)$ é compacta.

Considerando agora $1 < q < \infty$, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u| \, dx \to 0.$$

Como $2q - 1 > 1$, vem das imersões contínuas $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2)$, $1 \leqslant s < \infty$, que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u|^{2q-1} \, dx$ é limitado. Da desigualdade de Hölder sai que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u|^q \, dx &= \int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u|^{1/2} |u_n - u|^{q-1/2} \, dx \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u| \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u|^{2q-1} \right)^{1/2} \\
&\leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u_n - u| \right)^{1/2} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Conclui-se assim que $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2)$ compactamente, para todo $1 \leqslant q < \infty$. □

Estabeleça-se ainda um corolário do Teorema 1.3.1 para o espaço E.

Corolário 2.1.1. *Se $v \in E$, $\beta > 0$, $q > 0$ e $\|v\| \leqslant M$ com $\beta M^2 < 4\pi$, então existe $C = C(\beta, M, q) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)|v|^q \, dx \leqslant C \|v\|^q.$$

Demonstração. Seja $r > 1$ perto de 1 tal que $r\beta M^2 < 4\pi$ e $sq \geqslant 1$ onde $s = r/(r-1)$. Pela desigualdade de Hölder, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)|v|^q \, dx \leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)^r \, dx \right]^{1/r} \left[\int_{\mathbb{R}^2} |v|^{qs} \, dx \right]^{q/(qs)} \leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)^r \, dx \right]^{1/r} \|v\|_{qs}^q.$$

Agora, tomando $\alpha > r$ perto de r tal que $\alpha\beta M^2 < 4\pi$, pelo Teorema 1.3.1 e pelo Lema 1.3.3, vem que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)|v|^q \, dx &\leqslant C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)^r \, dx \right]^{1/r} \|v\|_{qs}^q \\
&\leqslant C_1 \left[\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha\beta M^2 (\frac{v}{\|v\|})^2} - 1) \, dx \right]^{1/r} \|v\|_{qs}^q \leqslant C_2 \|v\|_{qs}^q.
\end{aligned}$$

Por fim, usando a imersão contínua $E \hookrightarrow L^{qs}(\mathbb{R}^2)$, conclui-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta v^2} - 1)|v|^q \, dx \leqslant C\|v\|^q.$$

$\square$

Definição 2.1.1. *Diz-se que $f(s)$ tem crescimento subcrítico exponencial se para todo o $\alpha > 0$,*

(f_α) $\displaystyle\lim_{|s|\to+\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} = 0.$

Definição 2.1.2. *Diz-se que $f(s)$ tem crescimento crítico se existe $\alpha_0 > 0$ tal que*

(f_{α_0}) $\displaystyle\lim_{|s|\to+\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \forall \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \forall \alpha < \alpha_0. \end{cases}$

Exemplo 2.1.1. *Dois exemplos de funções que satisfazem os tipos de crescimento (f_α) e (f_{α_0}) são $f(s) = e^s$ e $g(s) = e^{s^2}$, respectivamente.*

Ora,

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{e^s}{e^{\alpha s^2}} = 0$$

para todo α positivo, visto que o crescimento da exponencial de s^2 é sempre superior ao da exponencial de s e, por outro lado, tem-se

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{e^{s^2}}{e^{\alpha s^2}} = \begin{cases} 0, & \forall\, \alpha > 1 \\ +\infty & \forall\, \alpha < 1. \end{cases}$$

Considere-se o problema (2.1) quando f admite um dos dois tipos de crescimento definidos acima, dizendo-se, no primeiro caso, que f tem crescimento do tipo (f_α) e, no segundo, do tipo (f_{α_0}). Considerem-se também as seguintes hipóteses sobre o termo não linear $f(s)$:

(f_0) f é contínua e $f(s) = o(s)$ quando $s \to 0$;

(f_1) existem $\theta > 2$ e $s_1 > 0$ tais que para todo o $|s| \geqslant s_1$,

$$0 < \theta F(s) = \theta \int_0^s f(t) \, dt \leqslant s f(s);$$

(f_2) existem constantes $R_0, M_0 > 0$ tais que para todo o $|s| \geqslant R_0$,

$$0 < F(s) \leqslant M_0 |f(s)|;$$

(f_3) $\lim_{s \to 0} 2F(s)s^{-2} < \lambda_1$,

onde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u^2\, dx} \\ &\geqslant \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u^2\, dx} \geqslant \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} V_0 u^2\, dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} u^2\, dx} = V_0 > 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Destas hipóteses tiram-se imediatamente os resultados seguintes.

Lema 2.1.2. *Suponha-se* (f_1)*. Então existem constantes positivas* C_1, C_2*, tais que*

$$F(s) \geqslant C_1 |s|^\theta - C_2, \quad \forall\, s \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

Demonstração. Ora, de (f_1), tem-se

$$\frac{f(s)}{F(s)} \geqslant \frac{\theta}{s} \text{ se } s \geqslant s_1 \quad \text{e} \quad \frac{f(s)}{F(s)} \leqslant \frac{\theta}{s} \text{ se } s \leqslant -s_1$$

Integrando a primeira desigualdade entre s_1 e s e a segunda entre s e $-s_1$, obtém-se

$$\log F(s) \geqslant \theta \log |s| + C$$

donde

$$F(s) \geqslant C_1 |s|^\theta, \quad |s| \geqslant s_1.$$

Por outro lado, no intervalo $[-s_1, s_1]$, tem-se que

$$\begin{aligned} &F(s) = \int_0^s f(t)\, dt, \quad s \in [-s_1, s_1] \\ &|F(s)| \leqslant s_1 M \end{aligned}$$

onde $M = \max_{[-s_1, s_1]} |f(s)|$. Fazendo $C_2 = s_1 M$, tem-se então que $F(s) \geqslant -C_2$ em $[-s_1, s_1]$, donde se conclui (2.4). □

Lema 2.1.3. *Suponha-se* (f_2). *Então existem constantes positivas* C_1, C_2, *tais que*

$$F(s) \geqslant C_1 e^{|s|/M_0} - C_2, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Demonstração. Ora, de (f_2), tem-se a seguinte desigualdade para todo $|s| \geqslant R_0$

$$\frac{|f(s)|}{F(s)} \geqslant \frac{1}{M_0}.$$

Integrando, obtém-se então

$$\log F(s) \geqslant \frac{|s|}{M_0} + C$$

donde

$$F(s) \geqslant C_1 e^{|s|/M_0}, \quad |s| \geqslant R_0.$$

Por outro lado, no intervalo $[-R_0, R_0]$, tem-se que

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^s f(t)\,dt, \quad s \in [-R_0, R_0] \\ |F(s)| &\leqslant s_1 M \end{aligned}$$

onde $M = \max_{[-R_0,R_0]} |f(s)|$. Fazendo $C_2 = s_1 M$, tem-se então que $F(s) \geqslant -C_2$ em $[-R_0, R_0]$, donde se conclui (2.5). □

2.2. Enquadramento Variacional

Estabeleça-se o enquadramento no qual as soluções do problema (2.1) possam ser estudadas naturalmente por métodos variacionais. Nesta secção estabelecem-se todos os resultados que são análogos ao caso subcrítico e ao caso crítico. Com isto em vista, considera-se sempre $\alpha > 0$ se $f(s)$ satisfizer (f_α) ou $\alpha > \alpha_0$ se $f(s)$ satisfizer (f_{α_0}).

Lema 2.2.1. *Seja* $q \geqslant 1$ *e suponha-se que* f *tem crescimento crítico ou subcrítico e satisfaz* (f_0) *e* (f_3). *Então, para qualquer* $\varepsilon > 0$, *existem constantes* $b_1, b_2 > 0$ *tais que*

$$|f(s)| \leqslant (\lambda_1 - \varepsilon)|s| + b_1 |s|^{q-1}(e^{\alpha s^2} - 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

$$|F(s)| \leqslant \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} s^2 + b_2 |s|^q (e^{\alpha s^2} - 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Demonstração. Da hipótese (f_3) tem-se que existe $\varepsilon, \delta_1 > 0$ tais que

$$|F(s)| \leqslant \frac{\lambda_1 - \varepsilon}{2} s^2, \quad \forall\, 0 < |s| < \delta_1.$$

Logo, da hipótese (f_0),

$$|f(s)| \leqslant (\lambda_1 - \varepsilon)|s|, \quad \forall\, 0 < |s| < \delta_1. \tag{2.8}$$

Para $\alpha > 0$ (respectivamente $\alpha > \alpha_0$), como $q \geqslant 1$, a condição (f_α) (respectivamente (f_{α_0})) garante que

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{|s|^{q-1}(e^{\alpha s^2} - 1)} = \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{|s|^{q-1}} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2} - 1} = \lim_{s \to +\infty} \frac{1}{|s|^{q-1}} \frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}} \frac{e^{\alpha s^2}}{e^{\alpha s^2} - 1} = 0,$$

o que implica que existe $\delta_2 > \delta_1 > 0$ tal que

$$|f(s)| < \varepsilon |s|^{q-1}(e^{\alpha s^2} - 1), \quad \forall |s| > \delta_2. \tag{2.9}$$

No caso em que $s \in [\delta_1, \delta_2]$, tem-se $(e^{\alpha\delta_1^2} - 1) \leqslant (e^{\alpha s^2} - 1)$.
Logo, $1 \leqslant (e^{\alpha\delta_1^2} - 1)^{-1}(e^{\alpha s^2} - 1)$. Por outro lado, como $f(s)$ é limitado em $[\delta_1, \delta_2]$, tem-se

$$\begin{aligned}
|f(s)| &\leqslant C, \quad \forall s \in [\delta_1, \delta_2] \\
&= C|s|^{q-1}|s|^{1-q} \quad \forall s \in [\delta_1, \delta_2] \\
&\leqslant C|s|^{q-1}(e^{\alpha\delta_1^2} - 1)^{-1}(e^{\alpha s^2} - 1) \quad \forall s \in [\delta_1, \delta_2] \\
&= C|s|^{q-1}(e^{\alpha s^2} - 1) \quad \forall s \in [\delta_1, \delta_2],
\end{aligned} \tag{2.10}$$

onde C denota uma constante diferente em cada passo. Portanto, de (2.8), (2.9) e (2.10), obtém-se (2.6). Para verificar (2.7), usa-se (2.6) e consideram-se dois casos.
Caso 1: $s > 0$

$$\begin{aligned}
|F(s)| &\leqslant \int_0^s |f(t)|\, dt \\
&\leqslant (\lambda_1 - \varepsilon) \int_0^s t\, dt + b_1 \int_0^s t^{q-1}(e^{\alpha t^2} - 1)\, dt \\
&\leqslant \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} s^2 + b_2 |s|^q (e^{\alpha s^2} - 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Caso 2: $s < 0$

$$\begin{aligned}
|F(s)| &\leqslant \int_0^s |f(t)|\,dt = -\int_s^0 |f(t)|\,dt \leqslant \int_s^0 |f(t)|\,dt \\
&\leqslant (\lambda_1 - \varepsilon)\int_s^0 |t|\,dt + b_1 \int_s^0 |t|^{q-1}(e^{\alpha t^2} - 1)\,dt \\
&\leqslant (\lambda_1 - \varepsilon)\int_s^0 -t\,dt + b_1(e^{\alpha s^2} - 1)\int_s^0 (-t)^{q-1}\,dt \qquad (2.12)\\
&\leqslant (\lambda_1 - \varepsilon)\int_0^s t\,dt + b_1(e^{\alpha s^2} - 1)\left[\frac{-(-t)^q}{q}\right]_s^0 \\
&\leqslant \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2}s^2 + b_2|s|^q(e^{\alpha s^2} - 1), \quad \forall s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

Ora, por (2.7) e pelo Corolário 2.1.1, tem-se que $F(u) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Portanto, o funcional *energia* $I : E \to \mathbb{R}$, associado naturalmente ao problema (2.1),

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu\,dx \qquad (2.13)$$

está bem definido. Por argumentos *standard* vê-se que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, cuja derivada é dada por

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv\,dx \quad \text{para } u, v \in E. \qquad (2.14)$$

Definição 2.2.1. *Diz-se que $u \in E$ é uma solução fraca de (2.1) se satisfizer*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u)v\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv\,dx = 0 \qquad (2.15)$$

para todo $v \in E$.

Consequentemente, os pontos críticos do funcional I são as soluções fracas do problema (2.1).

O próximo lema descreve a *estrutura geométrica* do funcional I necessária para aplicar o Teorema A.3.3.

Lema 2.2.2. *Suponham-se (f_1),(f_3) e (f_α) ou (f_{α_0}). Então existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$ com $\|h\|_2 < \delta_1$, se tem:*

i) existe $\rho_h > 0$ tal que $I(u) > 0$ se $\|u\| = \rho_h$. Além disso, ρ_h pode ser escolhido tal que $\rho_h \to 0$ quando $\|h\|_2 \to 0$;

ii) existe $e \in E$ com $\|e\| > \rho_h$ tal que $I(e) < \inf\limits_{\|u\|=\rho_h} I(u)$.

Demonstração. Usando (2.7), com $q > 2$ e o Corolário 2.1.1, tem-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(u)\,dx \leqslant \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2}\|u\|_2^2 + C\|u\|^q.$$

Logo, utilizando o Lema 2.1.1 e a definição de $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in E\setminus\{0\}} \dfrac{\|u\|^2}{\|u\|_2^2}$,

$$\begin{aligned} I(u) &\geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2}\|u\|_2^2 - C\|u\|^q - \|h\|_2\|u\|_2 \\ &\geqslant \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\right]\|u\|^2 - C\|u\|^q - C\|h\|_2\|u\|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$I(u) \geqslant \|u\| \left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\right)\|u\| - C\|u\|^{q-1} - C\|h\|_2\right]. \tag{2.16}$$

Como $\varepsilon > 0$ e $q > 2$, pode-se escolher $\rho > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\right]\rho - C\rho^{q-1} > 0.$$

Logo, para h tal que $\|h\|_2$ seja suficientemente pequena, existe $\rho_h > 0$ tal que $I(u) > 0$ se $\|u\| = \rho_h$. Por outro lado, quanto menor for $\|h\|_2$, menor poderá ser ρ_h de tal modo a que a expressão dada por (2.16) continue positiva.

Para provar *ii*), seja $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $u \equiv s_1$ em B_1, $u \equiv 0$ em B_2^c e $u \geqslant 0$. Denotando $K = \operatorname{supp}(u)$, por (2.4), tem-se que, para $t > 1$,

$$\begin{aligned} I(tu) &\leqslant \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - Ct^\theta \int_{\{x : t|u(x)| \geqslant s_1\}} u^\theta\,dx + C_1|K| - t\int_{\mathbb{R}^2} hu\,dx \\ &\leqslant \frac{t^2}{2}\|u\|^2 - Ct^\theta \int_{B_2} u^\theta\,dx + C_1|K| - t\int_{\mathbb{R}^2} hu\,dx. \end{aligned}$$

Como $\theta > 2$, tem-se que $I(tu) \to -\infty$. Tomando $e = tu$ com t grande o suficiente, o lema fica provado. $\square$

Lema 2.2.3. *Suponha-se (f_α) ou (f_{α_0}). Então existe $\eta > 0$ e $v \in E$ com $\|v\| = 1$ tal* *que* $I(tv) < 0$ *para todo* $0 < t < \eta$. *Em particular,*

$$\inf_{\|u\| \leqslant \eta} I(u) < 0.$$

Demonstração. Para cada $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$, considerando a identificação dada pelo teorema de representação de Riesz em E com o produto interno (2.2), o problema

$$-\Delta v + V(x)v = h, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

tem uma única solução v em E. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx = \|v\|^2 > 0 \text{ para cada } h \neq 0.$$

Considerando a função $g(t) = I(tv)$, $t \in [0, +\infty)$, tem-se

$$g'(t) = \frac{d}{dt} I(tv) = t\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(tv)v\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx.$$

Como $f(0) = 0$, $g'(0) = -\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} hv\, dx < 0$, logo existe $\eta > 0$ tal que para todo $0 < t < \eta$, $g'(t) < 0$. Usando que $I(0) = 0$, vem que $I(tv) < 0$ para todo $0 < t < \eta$. $\square$

Lema 2.2.4. *Suponham-se* (f_1) *ou* (f_2) *e* (f_α) *ou* (f_{α_0}). *Seja* (u_n) *em* E *uma sucessão de* $(PS)_c$ *para o funcional* I. *Então*

$$\|u_n\| \leqslant C, \quad \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n\, dx \leqslant C \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n)\, dx \leqslant C.$$

Demonstração. Tem-se

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_n)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\, dx = c + o_n(1),$$

e, para qualquer $\varphi \in E$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \nabla \varphi + V(x)u_n\varphi)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)\varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi\, dx = o_n(\|\varphi\|).$$

Tomando $\varphi = u_n$ na expressão acima obtém-se, por (f_1),

$$\begin{aligned}
c + \varepsilon_n\|u_n\| &\geqslant \theta I(u_n) - I'(u_n)(u_n)\\
&\geqslant \left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2}[\theta F(u_n) - f(u_n)u_n]\,dx\\
&\geqslant \left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 - \int_{\{x:\ |u_n(x)|<s_1\}}[\theta F(u_n) - f(u_n)u_n]\,dx,
\end{aligned}$$

onde $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Como f é contínua, tem-se que $|f(s)s - F(s)| \leqslant |f(s)s| + |F(s)| \leqslant |s| \max_{s\in[-s_1,s_1]} |f(s)| + |F(s)| \leqslant C_1|s|$, para todo $|s| \leqslant s_1$. Logo, pelo Lema 2.1.1,

$$c + \varepsilon_n\|u_n\| \geqslant \left(\frac{\theta}{2} - 1\right)\|u_n\|^2 - C_1\|u_n\|,$$

o que implica que $\|u_n\| \leqslant C$. Assim, de $I'(u_n)u_n = o(\|u_n\|)$ vem

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n\,dx &= o(\|u_n\|) + \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx\\
&\leqslant \varepsilon_n\|u_n\| + \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx\\
&\leqslant \varepsilon_n\|u_n\| + \|u_n\|^2 + C\|h\|_2\|u_n\|.
\end{aligned}$$

Como $I(u_n) \to c$, vem

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} F(u_n)\,dx &= -c + o(1) + \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx\\
&\leqslant -c + \varepsilon + \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx\\
&\leqslant -c + \varepsilon + \frac{1}{2}\|u_n\|^2 + C\|h\|_2\|u_n\|,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Para o próximo resultado, faz-se uso do Lema Radial (Lema A.2.1), que afirma que se $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$, então, considerando u^*, a simetrização de Schwarz de u, então para todo $x \neq 0$

$$|u^*(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|}\|u^*\|_2.$$

Lema 2.2.5. *Suponham-se (f_1), (f_2) e (f_{α_0}). Seja $(v_n) \subset E$ uma sucessão de (PS) para*

I e u_0 o seu limite fraco, então, a menos de subsucessão,

$$F(v_n) \to F(u_0) \ \textit{em} \ L^1(\mathbb{R}^2).$$

Demonstração. Como consequência dos Lemas A.5.3 e 2.2.4, para qualquer $R > 0$, tem-se que

$$f(v_n) \to f(u_0) \text{ em } L^1(B_R).$$

Logo, existe $g \in L^1(B_R)$ tal que, a menos de subsucessão, $|f(v_n)| \leqslant g$, q.t. $x \in B_R$. De (f_2), pode-se concluir que

$$|F(v_n)| \leqslant \sup_{v_n \in [-R_0, R_0]} |F(v_n)| + M_0 g \text{ q.t } x \in B_R.$$

Então, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$F(v_n) \to F(u_0) \text{ em } L^1(B_R)$$

para todo $R > 0$. De (2.7) com $q = 1$, tem-se que

$$\int_{|x|>R} |F(v_n)|\, dx \leqslant C_1 \int_{|x|>R} |v_n|^2\, dx + C_2 \int_{|x|>R} |v_n|(e^{\alpha|v_n|^2} - 1)\, dx \tag{2.17}$$

para $\alpha > \alpha_0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|>R} |v_n|(e^{\alpha|v_n|^2} - 1)\, dx &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \int_{|x|>R} |v_n|^{2j+1}\, dx \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \int_{|x|>R} |v_n^*|^{2j+1}\, dx
\end{aligned}$$

onde v_n^* é a simetrização de Schwarz de v_n. Usando a estimativa

$$\int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^{2j+1}}\, dx = 2\pi \int_R^{\infty} \frac{t}{t^{2j+1}}\, dt = \frac{2\pi}{2j-1} R^{1-2j} \leqslant \frac{2\pi}{R}, \quad j \geqslant 1,$$

e do Lema Radial, tem-se

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \int_{|x|>R} |v_n^*|^{2j+1}\, dx \leqslant \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \left(\frac{1}{\pi}\right)^j C^{2j} \int_{|x|>R} |x|^{-2j-1}\, dx$$
$$\leqslant \frac{C}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \left(\frac{1}{\pi}\right)^j C^{2j} \frac{2\pi}{R} \leqslant \frac{Ce^{\frac{\alpha C^2}{\pi}}}{R} \leqslant \frac{C}{R},$$

onde C denota uma constante diferente em cada passo. Então, dado $\delta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{|x|>R} u_0^2\, dx < \delta \text{ e } \int_{|x|>R} |v_n|(e^{\alpha|v_n|^2} - 1)\, dx < \delta.$$

De (2.17), conclui-se assim que

$$\int_{|x|>R} |F(v_n)|\, dx \leqslant C\delta \text{ e } \int_{|x|>R} |F(u_0)|\, dx \leqslant C\delta.$$

Como

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} F(v_n)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_0)\, dx\right| \leqslant \left|\int_{B_R} F(v_n)\, dx - \int_{B_R} F(u_0)\, dx\right| + \int_{|x|>R} F(v_n)\, dx + \int_{|x|>R} F(u_0)\, dx,$$

tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \left|\int_{\mathbb{R}^2} F(v_n)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} F(u_0)\, dx\right| \leqslant C\delta.$$

Como δ é arbitrário, o lema fica provado. □

2.3. Resultados principais

Considere-se

$$c_M = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leqslant t\leqslant 1} I(g(t)) \tag{2.18}$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : \ g(0) = 0 \text{ e } I(g(1)) < 0\}.$$

Tem-se $c_M \geqslant 0$. Observe-se que, pelo Lema 2.2.3 e pela desigualdade (2.16), se tem

$$-\infty < c_0 \equiv \inf_{\|u\|\leqslant\eta} I(u) < 0. \tag{2.19}$$

Nesta secção demonstram-se os resultados de existência de solução para o problema (2.1). Atendendo à diferença de comportamento do funcional associado, relativamente aos diferentes tipos de crescimento de f - subcrítico e crítico - as duas situações são estudadas em separado.

2.3.1. Caso subcrítico

Neste caso, consegue-se provar que o funcional associado à equação satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, o que permite obter pontos críticos do funcional. Consequentemente, é possível distinguir as duas soluções que se vai obter: a solução de mínimo local e a solução passagem da montanha.

O resultado principal desta subsecção é o seguinte:

Teorema 2.3.1. *Se $f(s)$ tem crescimento subcrítico e $(V_1)-(V_2)$, (f_0), (f_1) e (f_3) forem satisfeitas, então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_2 < \delta_1$, a equação (2.1) tem pelo menos duas soluções fracas, uma com energia positiva e outra com energia negativa.*

Observação 2.3.1. *Diz-se que uma solução u tem energia positiva se $I(u) > 0$. Analogamente, diz-se que tem energia negativa se $I(u) < 0$.*

Exemplo 2.3.1. Seja $0 < \lambda < \dfrac{\lambda_1}{2}$ com λ_1 definido em (2.3). Um exemplo de uma função que verifica as condições do Teorema 2.3.1 é

$$f(s) = \lambda(2s + s^2)e^s.$$

Claramente, (f_α) é satisfeito, visto que $e^{\alpha s^2}$ tem um crescimento muito mais rápido que $f(s)$ quando $|s| \to \infty$. É também trivial que (f_0) é satisfeito. Para verificar a condição (f_1), note-se que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(s)}{sf(s)} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{s^2 e^s}{s(2s + s^2)e^s} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{1}{2+s} = 0.$$

Para verificar (f_3), basta ver que

$$\lim_{s\to 0} \frac{2F(s)}{s^2} = 2\lambda \lim_{s\to 0} e^s = 2\lambda < \lambda_1.$$

Lema 2.3.1. *Sob as condições do Teorema 2.3.1, o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão de (PS) para o funcional I. Pelo Lema 2.2.4, (u_n) é limitada, logo, a menos de subsucessão, pode supor-se que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, $u_n \to u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo o $q \geqslant 1$ e $u_n(x) \to u_0(x)$ q.t $x \in \mathbb{R}^2$. Veja-se que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (f(u_n) - f(u_0))\,(u_n - u_0)\,dx \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.20}$$

Ora, usando a desigualdade (2.6) com $q = 1$, para todo o $\alpha > 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}|f(u_n) - f(u_0)|\,|u_n - u_0| &\leqslant (|f(u_n)| + |f(u_0)|)|u_n - u_0| \\ &\leqslant C\left[|u_n| + |u_0| + (e^{\alpha|u_n|^2} - 1) + (e^{\alpha u_0^2} - 1)\right]|u_n - u_0|.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade anterior no integral de (2.20) e a desigualdade de Hölder vem, pelo Teorema 1.3.1,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2} (f(u_n) - f(u_0))\,(u_n - u_0)\,dx \leqslant C\int_{\mathbb{R}^2}\left[|u_n| + |u_0| + (e^{\alpha|u_n|^2} - 1) + (e^{\alpha u_0^2} - 1)\right]|u_n - u_0|\,dx \\ &\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^2}\left[|u_n| + |u_0| + (e^{\alpha|u_n|^2} - 1) + (e^{\alpha u_0^2} - 1)\right]^q dx\right)^{1/q}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u_n - u_0|^p\,dx\right)^{1/p}\end{aligned}$$

onde $p, q > 1$ são tais que $1/p + 1/q = 1$. Ora, como $u_n \rightharpoonup u_0$ em E e $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2)$ compactamente,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2}|u_n - u_0|^p\,dx\right)^{1/p} \to 0.$$

Pelo Lema 1.3.3, existe $\beta > q$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha|u_n|^2} - 1)^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha\beta|u_n|^2} - 1)\,dx\right)^{1/q} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha\beta M\left(\frac{u_n}{\|u_n\|^2}\right)^2} - 1)\,dx\right)^{1/q},$$

onde M é um majorante de $\|u_n\|^2$. Tomando $\alpha > 0$ tal que $\alpha\beta M \leqslant 4\pi$, isto é, $\alpha \leqslant \frac{4\pi}{\beta M}$, vem, pelo Teorema 1.3.1, $C\left(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha\beta M\left(\frac{u_n}{\|u_n\|^2}\right)^2} - 1)\,dx\right)^{1/q} \leqslant C(M, \alpha, \beta)$. Esta escolha de α é possível, visto que se está no caso subcrítico e, consequentemente, (2.20) fica provado. Observando que

$$\|u_n - u_0\|^2 = \langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0\rangle + \int_{\mathbb{R}^2}(f(u_n) - f(u_0))\,(u_n - u_0)\,dx,$$

conclui-se que $u_n \to u_0$ e o resultado segue. $\square$

Proposição 2.3.1. *Existe $\eta_1 > 0$ tal que se $\|h\|_2 \leqslant \eta_1$ o funcional I tem um ponto crítico u_M no nível de minimax c_M definido em (2.18).*

A demonstração da Proposição 2.3.1 segue imediatamente dos lemas 2.2.2 e 2.3.1. Do Lema 2.2.2 vem que o funcional tem a geometria do Teorema A.3.3 e como, pelo Lema 2.3.1, satisfaz a condição de Palais-Smale, então do Teorema A.3.3 garante-se assim a Proposição 2.3.1.

Proposição 2.3.2. *Para cada $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$ com $h \neq 0$, a equação (2.1) tem uma solução tipo mínimo u_0 com $I(u_0) = c_0$, com c_0 definido em (2.19).*

Demonstração. Seja ρ_h como definido no Lema 2.2.2. Visto que $\overline{B}_{\rho_h}$ é um espaço métrico completo com métrica dada pela norma de E, convexo e, o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente em $\overline{B}_{\rho_h}$, tem-se que, pelo princípio variacional de Ekeland, existe uma sucessão (u_n) em $\overline{B}_{\rho_h}$ tal que

$$I(u_n) \to c_0 = \inf_{\|u\| \leqslant \rho_h} I(u) < 0 \quad \text{ e } \quad \|I'(u_n)\|_{E'} \to 0.$$

Pelo Lema 2.3.1, tal sucessão tem uma subsucessão convergente, o que conclui a demonstração. $\square$

Observação 2.3.2. *Note-se que na demonstração do Lema 2.3.1, se α tiver uma restrição como a do caso crítico, em que $\alpha > \alpha_0$, o Teorema 1.3.1 iria depender da norma da sucessão.*

2.3.2. Caso crítico

Considere-se agora o caso em que f tem crescimento crítico. Tal como no caso subcrítico, a ideia é encontrar uma solução do tipo mínimo através do princípio variacional de Ekeland e uma solução do tipo passagem da montanha. No entanto, não se consegue garantir a condição de compacidade de Palais-Smale, pelo que as conclusões são obtidas de forma diferente.

Por exemplo, uma dificuldade adicional vai ser a distinção entre as duas soluções, já que, neste caso, não é evidente que se encontrem em níveis diferentes. Vai ser preciso uma hipótese extra para f.

Nesta subsecção provam-se os seguintes resultados:

Teorema 2.3.2. *Se $f(s)$ tem crescimento crítico e se $(V_1)-(V_2)$, (f_0), (f_2) e (f_3) forem satisfeitos, então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_2 < \delta_1$, (2.1) tem uma solução fraca com energia negativa.*

Já para estabelecer a existência de uma segunda solução, são precisas hipóteses mais refinadas.

Teorema 2.3.3. *Sob as hipóteses do Teorema 2.3.2, considere-se ainda que existe $\beta_0 > 0$ tal que*

$$(f_4^+) \quad \lim_{s\to\infty} sf(s)e^{-\alpha_0 s^2} \geqslant \beta_0 > 0.$$

Então existe $\delta_2 > 0$, tal que se $0 < \|h\|_2 < \delta_2$, o problema (2.1) tem uma segunda solução fraca.

Exemplo 2.3.2. Um exemplo de uma função que verifica as condições dos teoremas 2.3.2 e 2.3.3 é

$$f(s) = 3s^2 + 2se^{s^2} - 2s.$$

Vê-se facilmente que (f_{α_0}) é satisfeito com $\alpha_0 = 1$. É também trivial que (f_0) é satisfeito. Para verificar a condição (f_2), note-se que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(s)}{f(s)} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{s^3 + e^{s^2} - 1 - s^2}{3s^2 + 2se^{s^2} - 2s} = 0.$$

Para verificar (f_3), basta ver que

$$\lim_{s\to 0} \frac{2F(s)}{s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{2s^3 + 2e^{s^2} - 2 - 2s^2}{s^2} = \lim_{s\to 0} 2s + 2\frac{e^{s^2} - 1}{s^2} - 2 = 0 + 2 - 2 = 0 < \lambda_1.$$

E para verificar (f_4^+), basta ver que

$$\lim_{|s|\to\infty} sf(s)e^{-s^2} = \lim_{|s|\to\infty} (3s^3 + 2s^2e^{s^2} - 2s^2)e^{-s^2} = \lim_{|s|\to\infty} 3s^3e^{-s^2} + 2s^2 - 2s^2e^{-s^2} = +\infty.$$

Para demonstrar o Teorema 2.3.1 é necessário o próximo resultado que garante a condição de (PS) em certos níveis, sob hipóteses mais fracas do que as apresentadas no caso subcrítico.

Lema 2.3.2. *Suponha-se que f tem crescimento crítico e satisfaz (f_2). Se (u_n) for uma sucessão de (PS) para I num qualquer nível, tal que*

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 < \frac{4\pi}{\alpha_0},$$

então (u_n) possui uma subsucessão que converge fortemente para uma solução u_0 de (2.1).

Demonstração. Pelo Lema 2.2.4, $\|u_n\|$ é limitada logo, passando a uma subsucessão se necessário, pode supor-se que

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

Pode assumir-se também que $u_n \rightharpoonup u_0$ em E, $u_n \to u_0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geqslant 1$ e $u_n(x) \to u_0(x)$ q.t $x \in \mathbb{R}^2$. Além disso, pelo Lema A.5.3,

$$f(u_n) \to f(u_0) \qquad \text{em} \qquad L^1_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Como (u_n) é sucessão de (PS), então $I'(u_n)\varphi = o_n(\|\varphi\|)$, ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \nabla \varphi + V(x) u_n \varphi)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)\varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi\, dx = o_n(\|\varphi\|)$$

para todo o $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Assim, passando ao limite tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0 \nabla \varphi + V(x) u_0 \varphi)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)\varphi\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi\, dx = 0$$

para todo o $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E, conclui-se que u_0 é solução fraca de (2.1).

Veja-se que se tem a convergência forte $u_n \to u_0$. Escrevendo $u_n = u_0 + w_n$, vem que $w_n \rightharpoonup 0$ em E. Logo, $w_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 \leqslant q < \infty$. Pelo Lema de Brézis-Lieb (Cf. Lema A.5.1), tem-se

$$\|u_n\|^2 = \|u_0\|^2 + \|w_n\|^2 + o_n(1). \tag{2.21}$$

Verifique-se agora que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n) u_0\, dx \to \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0) u_0\, dx \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{2.22}$$

De facto, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E, para todo $t > 0$, existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que

$\|\varphi - u_0\| < t$. Observe-se que

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_0\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0\,dx\Big|\\&\leqslant \Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0-\varphi)\,dx\Big| + \Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)(u_0-\varphi)\,dx\Big| + \|\varphi\|_\infty \int_{\text{supp}\,\varphi} |f(u_n)-f(u_0)|\,dx.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Para estimar o primeiro integral, usa-se que $|\langle I'(u_n), u_0-\varphi\rangle| \leqslant t_n\|u_0-\varphi\|$ com $t_n \to 0$. Ora,

$$\langle I'(u_n), u_0-\varphi\rangle = \langle u_n, u_0-\varphi\rangle - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0-\varphi)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0-\varphi)\,dx,$$

portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0-\varphi)\,dx = \langle u_n, u_0-\varphi\rangle - \langle I'(u_n), u_0-\varphi\rangle - \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0-\varphi)\,dx.$$

Donde se conclui que

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0-\varphi)\,dx\Big|\\&\leqslant \|u_n\|\|u_0-\varphi\| + t_n\|u_0-\varphi\| + \|h\|_2\|u_0-\varphi\|\\&\leqslant C\|u_0-\varphi\| < Ct,\end{aligned}$$

onde C é independente de n e de t. De forma análoga, usando $\langle I'(u_0), u_0-\varphi\rangle = 0$, pode-se estimar o segundo integral, obtendo-se

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)(u_0-\varphi)\,dx\Big| < Ct.$$

Para estimar o último integral, usa-se o facto de $f(u_n) \to f(u_0)$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ e conclui-se pelas desigualdades anteriores que

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_0\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0\,dx\Big| < 2Ct.$$

O que implica (2.22) visto que t é arbitrário ($t = \|u_0-\varphi\|$).

Conjugando

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx,$$

e

$$\langle I'(u_0), u_0\rangle = \|u_0\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_0\,dx,$$

com (2.21) vem

$$\begin{aligned}
&\langle I'(u_n), u_n\rangle = \|u_0\|^2 + \|w_n\|^2 + o_n(1) - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx\\
&= \langle I'(u_0), u_0\rangle + \|w_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hu_n\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} hu_0\,dx + o_n(1)\\
&= \langle I'(u_0), u_0\rangle + \|w_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)(u_0+w_n)\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} h(u_0-u_n)\,dx + o_n(1)\\
&= \langle I'(u_0), u_0\rangle + \|w_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)w_n\,dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Atendendo a que u_0 é solução fraca, $\langle I'(u_0), u_0\rangle = 0$ e, como $\langle I'(u_n), u_n\rangle = o_n(1)$ vem,

$$\|w_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)w_n\,dx + o_n(1). \tag{2.24}$$

De (2.6) com $q = 1$, pela desigualdade de Hölder e pelo Lema 1.3.2, para qualquer $\alpha > \alpha_0$, tem-se

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)w_n\,dx\Big| &\leqslant b_1\int_{\mathbb{R}^2} |u_n||w_n|\,dx + b_2\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha|u_n|^2}-1)|w_n|\,dx\\
&\leqslant C_1\|w_n\|_2 + b_2\Big[\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha\|u_n\|^2(u_n/\|u_n\|)^2}-1)^r\,dx\Big]^{1/r}\|w_n\|_p\\
&\leqslant C_1\|w_n\|_2 + b_2\Big[\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha q\|u_n\|^2(u_n/\|u_n\|)^2}-1)\,dx\Big]^{1/r}\|w_n\|_p,
\end{aligned}$$

onde $r > 1$, $p = r/(r-1)$ e $q > r$. Por hipótese, $\alpha_0\|u_n\|^2 < 4\pi$ para n grande o suficiente. Considerem-se agora $\alpha > \alpha_0$ e $q > r$, com $r > 1$ perto de 1, tais que ainda se tenha $\alpha q\|u_n\|^2 < 4\pi$. Usando o Teorema 1.3.1 e o Corolário 2.1.1, conclui-se que o integral no segundo membro da desigualdade anterior é majorado por uma constante independente de n. Assim, atendendo a $w_n \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^2)$, $q \geqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)w_n\,dx \leqslant C_1\|w_n\|_2 + C_2\|w_n\|_p \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)w_n\,dx \to 0,$$

De (2.24) sai então $\|w_n\| \to 0$, o que conclui a demonstração. □

Proposição 2.3.3. *Existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$ com $0 < \|h\|_2 < \delta_1$, a equação (2.1) tem uma solução tipo mínimo u_0 com $I(u_0) = c_0$, sendo c_0 definido em*

(2.19).

Demonstração. Considere-se agora ρ_h como no Lema 2.2.2. Pode-se escolher $\|h\|_2$ pequena o suficiente tal que $\rho_h < (4\pi/\alpha_0)^{1/2}$. Como $\overline{B}_{\rho_h}$ é um espaço métrico completo convexo, com a métrica dada pela norma de E, e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente em $\overline{B}_{\rho_h}$, pelo princípio variacional de Ekeland, existe uma sucessão (u_n) em $\overline{B}_{\rho_h}$ tal que

$$I(u_n) \to c_0 = \inf_{\|u\| \leqslant \rho_h} I(u) \text{ e } \|I'(u_n)\|_{E'} \to 0.$$

Tendo em conta que $\|u_n\|^2 \leqslant \rho_h^2 < 4\pi/\alpha_0$, pelo Lema 2.3.2, existe uma subsucessão de (u_n) que converge fortemente para uma solução u_0 de (2.1). Logo $I(u_0) = c_0 < 0$, o que prova o Teorema 2.3.2. $\square$

Ora, para se obterem informações mais precisas sobre o nível de minimax obtido pelo teorema da passagem da montanha, considere-se a sucessão de funções considerada por Moser:

$$\widetilde{M}_n(x,r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \begin{cases} (\log n)^{1/2} & \text{se } |x| \leqslant r/n, \\ \frac{\log(\frac{r}{|x|})}{(\log n)^{1/2}} & \text{se } r/n \leqslant |x| \leqslant r, \\ 0 & \text{se } |x| \geqslant r. \end{cases}$$

Note-se que $\operatorname{supp}(\widetilde{M}_n(x,r)) = \overline{B_r}$. Com uma mudança para coordenadas polares, vê-se que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widetilde{M}_n(x,r)|^2\, dx &= (\log n)^{-1} \int_{r/n}^{r} \left(\frac{d}{d\rho} \log(\frac{r}{\rho}) \right)^2 \rho\, d\rho \\
&= (\log n)^{-1} \int_{r/n}^{r} \frac{1}{\rho}\, d\rho \\
&= (\log n)^{-1} [\log r - (\log r - \log n)] = 1
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{M}_n(x,r)|^2\, dx &= \log n \int_0^{r/n} \rho\, d\rho + (\log n)^{-1} \int_{r/n}^{r} \log^2(\frac{r}{\rho}) \rho\, d\rho \\
&= \frac{r^2 \log n}{n^2} + (\log n)^{-1} \frac{1}{4} \left[\rho^2 (2\log^2(\frac{r}{\rho}) + 2\log(\frac{r}{\rho}) + 1) \right]_{r/n}^{r} \\
&= \frac{1}{\log n} \left(\frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4n^2} + \frac{r^2 \log^2 n}{2n^2} - \frac{r^2 \log n}{2n^2} \right) \\
&\leqslant M \frac{1}{\log n},
\end{aligned}$$

para um certo $M > 0$. Pelo que se tem $\widetilde{M}_n(\cdot, r) \in H^1(\mathbb{R}^2)$, verificando

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widetilde{M}_n(x,r)|^2 \, dx = 1 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{M}_n(x,r)|^2 \, dx = O(1/\log n) \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.25}$$

Seja $M_n(x,r) = \widetilde{M}_n(x,r)/\|\widetilde{M}_n\|$. Para $|x| \leqslant r/n$, tem-se ainda que

$$\begin{aligned} M_n^2(x,r) &= (2\pi)^{-1} \log n \|\widetilde{M}_n\|^{-2} \\ &= (2\pi)^{-1} \log n + (2\pi)^{-1} \log n \|\widetilde{M}_n\|^{-2} - (2\pi)^{-1} \log n \\ &= (2\pi)^{-1} \log n + d_n \end{aligned}$$

onde $d_n = (2\pi)^{-1} \log n (\|\widetilde{M}_n\|^{-2} - 1)$. Usando (2.25), conclui-se que $\|\widetilde{M}_n\| \to 1$ quando $n \to \infty$. Logo,

$$\frac{d_n}{\log n} \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.26}$$

Lema 2.3.3. *Suponham-se (f_2), (f_3) e (f_4^+). Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\max_{t \geqslant 0} \left[\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n) \, dx \right] < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Demonstração. Fixe-se $r > 0$ tal que

$$\beta_0 > \frac{2}{r^2 \alpha_0}, \tag{2.27}$$

onde β_0 é dado pela hipótese (f_4^+). Suponha-se, por contradição, que se tem para todo o n

$$\max_{t \geqslant 0} \left[\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n) \, dx \right] \geqslant \frac{2\pi}{\alpha_0}. \tag{2.28}$$

Por (f_2), tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n) \, dx \geqslant -C_1 + \int_{\{tM_n \geqslant R_0\}} F(tM_n) \, dx \geqslant -C_1 + C_2 \int_{\{tM_n \geqslant R_0\}} e^{tM_n/M_0} \, dx.$$

Se $t > 0$ for suficientemente grande e, $m > 2$, tem-se

$$\int_{\{tM_n \geqslant R_0\}} e^{tM_n/M_0} \, dx \geqslant C_3 t^m \int_{\{tM_n \geqslant R_0\}} (M_n)^m \, dx \geqslant C_3 t^m \int_{\{M_n \geqslant R_0\}} (M_n)^m \, dx.$$

Assim, $t \mapsto \dfrac{t^2}{2} - \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n)\,dx$ é limitada superiormente e

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n)\,dx = -\infty.$$

Logo, para cada n existe $t_n > 0$ tal que

$$\frac{t_n^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(t_nM_n)\,dx = \max_{t\geqslant 0}\left[\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n)\,dx\right]. \tag{2.29}$$

Como em $t = t_n$ tem-se que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n)\,dx\right) = 0,$$

vem que

$$t_n^2 = \int_{\mathbb{R}^2} t_nM_nf(t_nM_n)\,dx = \int_{|x|\leqslant r} t_nM_nf(t_nM_n)\,dx. \tag{2.30}$$

Agora, usando a hipótese (f_4^+), para cada $\varepsilon > 0$, existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$uf(u) \geqslant (\beta_0 - \varepsilon)e^{\alpha_0 u^2} \text{ para todo } u \geqslant R_\varepsilon. \tag{2.31}$$

Considerando $|x| \leqslant r/n$, tem-se $M_n^2(x,r) = (2\pi)^{-1}\log n + d_n$ logo, para n grande, $t_nM_n \geqslant R_\varepsilon$, donde de (2.30) e (2.31), obtém-se

$$t_n^2 \geqslant (\beta_0 - \varepsilon)\int_{|x|\leqslant r/n} e^{\alpha_0(t_nM_n)^2} = (\beta_0 - \varepsilon)\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2 e^{\alpha_0(2\pi)^{-1}\log n t_n^2 + \alpha_0 t_n^2 d_n}. \tag{2.32}$$

Logo,

$$1 \geqslant (\beta_0 - \varepsilon)\pi r^2 e^{\alpha_0(2\pi)^{-1}\log n t_n^2 + \alpha_0 t_n^2 d_n - 2\log t_n - 2\log n}.$$

Consequentemente, a sucessão (t_n) é limitada.

Veja-se que

$$t_n^2 \to \frac{4\pi}{\alpha_0} \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.33}$$

De facto, a condição (f_1) com (2.28) e (2.29) implica que

$$\frac{t_n^2}{2} \geqslant \frac{2\pi}{\alpha_0} + \int_{\{t_nM_n\leqslant R_0\}} F(t_nM_n)\,dx.$$

Como (t_n) é limitada, usando (2.7) com $q = 2$, obtém-se

$$\left| \int_{\{t_n M_n \leqslant R_0\}} F(t_n M_n)\, dx \right| \leqslant C \int_{\mathbb{R}^2} |M_n|^2\, dx = C \frac{1}{\|\widetilde{M}_n\|^2} \int_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{M}_n|^2\, dx.$$

Usando (2.25) e o facto de $\|\widetilde{M}_n\| \to 1$, obtém-se

$$\int_{\{t_n M_n \leqslant R_0\}} F(t_n M_n)\, dx = o_n(1).$$

Consequentemente

$$t_n^2 \geqslant \frac{4\pi}{\alpha_0} + o_n(1).$$

Agora, suponha-se por contradição que $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n^2 > 4\pi/\alpha_0$, então, para n grande, $\dfrac{\alpha_0}{4\pi} t_n^2 > 1$. De (2.32) tem-se que

$$t_n^2 \geqslant (\beta_0 - \varepsilon)\pi r^2 e^{(\alpha_0 (4\pi)^{-1} t_n^2 - 1) 2\log n + \alpha_0 t_n^2 d_n},$$

o que juntamente com (2.26) contradiz o facto de (t_n) ser limitado. Conclui-se então que $\lim\limits_{n\to\infty} t_n^2 = \dfrac{4\pi}{\alpha_0}$.

Para se estimar (2.30) com mais precisão, considerem-se os conjuntos (ver (2.30) e (2.31))

$$A_n = \{x \in B_r :\ t_n M_n(x) \geqslant R_\varepsilon\} \qquad \text{e} \qquad C_n = B_r \setminus A_n.$$

De (2.30) e (2.31), tem-se

$$t_n^2 \geqslant (\beta_0 - \varepsilon) \int_{|x|\leqslant r} e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2}\, dx + \int_{C_n} t_n M_n f(t_n M_n)\, dx - (\beta_0 - \varepsilon) \int_{C_n} e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2}\, dx. \tag{2.34}$$

Note-se que $M_n(x) \to 0$ e as funções características $\chi_{C_n} \to 1$ q.t. x tal que $|x| \leqslant r$. Logo, o teorema da convergência dominada de Lebesgue implica

$$\int_{C_n} t_n M_n f(t_n M_n)\, dx \to 0 \text{ e } \int_{C_n} e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2}\, dx = \int_{B_r} \chi_{C_n} e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2}\, dx \to \pi r^2 \text{ quando } n \to \infty.$$

Como $t_n^2 \geqslant 4\pi/\alpha_0$, tem-se também que

$$\int_{|x|\leqslant r} e^{\alpha_0 (t_n M_n)^2}\, dx \geqslant \int_{|x|\leqslant r} e^{4\pi M_n^2}\, dx = \int_{|x|\leqslant r/n} e^{4\pi M_n^2}\, dx + \int_{r/n\leqslant |x|\leqslant r} e^{4\pi M_n^2}\, dx. \tag{2.35}$$

Para o primeiro integral em (2.35), note-se que

$$\int_{|x|\leqslant r/n} e^{4\pi M_n^2}\,dx = \int_{|x|\leqslant r/n} e^{2\log n+4\pi d_n}\,dx = \pi\frac{r^2}{n^2}n^{2+4\pi(\log n)^{-1}d_n} \to \pi r^2 \text{ quando } n\to\infty,$$

onde se usa (2.26). Para o segundo integral, através da mudança de variável $t = \log(r/s)/(\xi_n \log n)$ com $\xi_n = \|\widetilde{M}_n\| > 1$, obtém-se

$$\int_{r/n\leqslant|x|\leqslant r} e^{4\pi M_n^2}\,dx = 2\pi r^2\xi_n\log n\int_0^{\xi_n^{-1}} e^{2\xi_n\log n(\xi_n t^2-t)}\,dt.$$

Como

$$\xi_n t^2 - t \geqslant \begin{cases} -t & \text{se } 0\leqslant t\leqslant \frac{\xi_n^{-1}}{2},\\ \xi_n(t-\xi_n^{-1})-1 & \text{se } \frac{\xi_n^{-1}}{2}\leqslant t\leqslant \xi_n^{-1},\end{cases}$$

tem-se que

$$2\pi r^2\xi_n\log n\int_0^{\frac{\xi_n^{-1}}{2}} e^{2\xi_n\log n(-t)}\,dt = \pi r^2(1-n)$$

e

$$2\pi r^2\xi_n\log n\int_{\frac{\xi_n^{-1}}{2}}^{\xi_n^{-1}} e^{2\xi_n\log n(\xi_n(t-\xi_n^{-1})-1)}\,dt = \pi r^2(1+n)$$

logo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{r/n\leqslant|x|\leqslant r} e^{4\pi M_n^2}\,dx \geqslant 2\pi r^2.$$

Finalmente, tomando $n\to\infty$ em (2.34) e, usando (2.31), obtém-se

$$\frac{4\pi}{\alpha_0} \geqslant (\beta_0-\varepsilon)2\pi r^2$$

donde vem $\beta_0 \leqslant 2/(\alpha_0 r^2)$, o que contradiz (2.27) e, conclui a demonstração. □

Corolário 2.3.1. *Sob as hipóteses* (V_1) *e* (f_2)*-*(f_4^+)*, se* $\|h\|_2$ *for suficientemente pequena então*

$$\max_{t\geqslant 0} I(tM_n) = \max_{t\geqslant 0}\left\{\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(tM_n)\,dx - t\int_{\mathbb{R}^2} hM_n\,dx\right\} < \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Demonstração. Tendo em conta que $\|hM_n\|_1 \leqslant \|h\|_2$, basta tomar $\|h\|_2$ suficientemente pequena e aplicar o Lema 2.3.3 para obter o resultado. □

Corolário 2.3.2. *Sob as hipóteses* (f_2)*-*(f_4^+)*, existe* $\delta_2 > 0$ *tal que para todo* $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$

com $0 < \|h\|_2 < \delta_2$ *existe* $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ *com suporte compacto que verifica*

$$I(tu) < c_0 + \frac{2\pi}{\alpha_0} \text{ para todo } t \geqslant 0.$$

Demonstração. Reduzindo $\|h\|_2$, é possível aumentar o ínfimo c_0. Pelo Lema 2.2.2, $\rho_h \to 0$ quando $\|h\|_2 \to 0$. Consequentemente, c_0 aumenta quando $\|h\|_2$ diminui e, $c_0 \to 0$ quando $\|h\|_2 \to 0$. Logo, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_2 < \delta_2$ então, pelo Corolário 2.3.1, tem-se

$$\max_{t \geqslant 0} I(tM_n) < c_0 + \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

Conclui-se o resultado tomando $u = M_n \in H^1(\mathbb{R}^2)$. □

Proposição 2.3.4. *Sob as hipóteses* (V_1)-(V_2) *e* (f_2)-(f_4^+), *existe* $\delta_1 > 0$ *tal que, se* $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$ *for tal que* $\|h\|_2 < \delta_1$, *então o problema (2.1) tem uma solução* u_M *tipo passagem da montanha.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2.2, I tem a geometria passagem da montanha. Logo, pelo Teorema A.3.4, existe uma sucessão (u_n) em E que satisfaz

$$I(u_n) \to c_M > 0 \qquad \text{e} \qquad \|I'(u_n)\|_{E'} \to 0,$$

onde c_M é o nível passagem da montanha. Ora, pelo Lema 2.2.4, a sucessão (u_n) é limitada logo, (u_n) converge fracamente para (u_M) e, pela densidade de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ em E, vem que u_M é solução de (2.1). □

Observação 2.3.3. *Pelo Corolário 2.3.2, conclui-se que*

$$0 < c_M < c_0 + \frac{2\pi}{\alpha_0}.$$

O próximo resultado vai garantir que as duas soluções encontradas são distintas, já que, à partida, desconhece-se o nível da solução obtida via passagem da montanha. Para tal, a estimativa anterior vai ser usada de forma fundamental.

Proposição 2.3.5. *Sob as hipóteses* (V_1)-(V_2) *e* (f_0), (f_2)-(f_4^+). *Se* $\delta_2 > 0$ *(dado no Corolário 2.3.2) for pequeno o suficiente, então as soluções de (2.1)* u_0 *(conforme a Proposição 2.3.3) e* u_M *(conforme a Proposição 2.3.4) são distintas.*

Demonstração. Ora, tem-se que existem sucessões (u_n) e (v_n) em E tais que

$$u_n \to u_0, \qquad I(u_n) \to c_0 < 0, \qquad \langle I'(u_n), u_n \rangle \to 0, \tag{2.36}$$

e

$$v_n \rightharpoonup u_M, \qquad I(v_n) \to c_M > 0, \qquad \langle I'(v_n), v_n\rangle \to 0. \tag{2.37}$$

Suponha-se por contradição que $u_0 = u_M$. Assim $v_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e, a menos de subsucessão, $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2} \geqslant \|u_0\|_{1,2} > 0$. Definindo

$$w_n = \frac{v_n}{\|v_n\|_{1,2}} \qquad \text{e} \qquad w_0 = \frac{u_0}{\lim_{n\to\infty}\|v_n\|_{1,2}},$$

tem-se $\|w_n\|_{1,2} = 1$ e $w_n \rightharpoonup w_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Agora, considerem-se as duas possibilidades:

$$(i)\ \|w_0\|_{1,2} = 1 \qquad \text{e} \qquad (ii)\ \|w_0\|_{1,2} < 1.$$

Se (i) acontece, tem-se $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2} = \|u_0\|_{1,2}$, logo $v_n \to u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Pelo Lema A.5.2, existe $g \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$|v_n| \leqslant g \ \text{ q.t. } x \in \mathbb{R}^2.$$

Isto e (2.6), com $q = 2$, implica que

$$|f(v_n)v_n| \leqslant c_1 g^2 + c_2|g|(e^{\alpha g^2} - 1) \ \text{ q.t. } x \in \mathbb{R}^2,$$

para cada $\alpha > \alpha_0$. Como a função $c_1 g^2 + c_2|g|(e^{\alpha g^2} - 1) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, conclui-se pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n\,dx \to \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0\,dx.$$

Analogamente, como $u_n \to u_0$ em E,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n\,dx \to \int_{\mathbb{R}^2} f(u_0)u_0\,dx.$$

Agora, como

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(u_n)u_n\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} h u_n\,dx \to 0$$

e

$$\langle I'(v_n), v_n\rangle = \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)v_n\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} h v_n\,dx \to 0$$

conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \|u_0\|^2.$$

Logo, $v_n \to u_0$ em E e, consequentemente, $I(v_n) \to I(u_0) = c_0 < 0$, o que contradiz (2.37).
Agora, suponha-se que (ii) acontece. Veja-se que existe $\delta > 0$ tal que

$$q\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 \leqslant 4\pi \frac{1}{1 - \|w_0\|_{1,2}^2} - \delta \tag{2.38}$$

para n grande. De facto, pela Observação 2.3.3, tem-se

$$c_M < c_0 + \frac{2\pi}{\alpha_0} = I(u_0) + \frac{2\pi}{\alpha_0} \Leftrightarrow c_M - I(u_0) < \frac{2\pi}{\alpha_0} \Leftrightarrow \alpha_0 < \frac{2\pi}{c_M - I(u_0)}.$$

Logo, pode-se escolher $q > 1$ perto de 1 o suficiente e, $\delta > 0$ tais que

$$q\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 \leqslant \frac{2\pi}{c_M - I(u_0)} \|v_n\|_{1,2}^2 - \delta.$$

Por (2.37), tem-se que

$$\begin{aligned}
&I(v_n) = c_M + o_n(1) \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(v_n)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv_n\,dx = c_M + o_n(1) \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{2}\left(\|v_n\|_{1,2}^2 + \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|v_n|^2\,dx - \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} |v_n|^2\,dx\right) \\
&= c_M + \int_{\mathbb{R}^2} F(v_n)\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} hv_n\,dx + o_n(1).
\end{aligned}$$

Como $v_n \rightharpoonup u_0$, pelos Lemas 2.2.5 e 2.1.1, a menos de subsucessão, pode-se concluir que

$$\frac{1}{2}\|v_n\|_{1,2}^2 = c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|v_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left[F(u_0) + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]\,dx + o_n(1). \tag{2.39}$$

Logo, para n grande o suficiente tem-se

$$\begin{aligned}
&q\alpha_0 \|v_n\|_{1,2}^2 \leqslant \\
&4\pi \frac{c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|v_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^2}\left[F(u_0) + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]\,dx + o_n(1)}{c_M - I(u_0)} - \delta.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Tendo em conta que

$$
\begin{aligned}
&\Big\{c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|v_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^2}\Big[F(u_0) + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\Big]\,dx\Big\}(1 - \|w_0\|_{1,2}^2)\\
&= c_M - c_M\|w_0\|_{1,2}^2 - I(u_0) + \frac{1}{2}\|u_0\|_{1,2}^2 + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2\,dx - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|v_n|^2\,dx\\
&- \Big\{-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|v_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^2}\Big[F(u_0) + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\Big]\,dx\Big\}\|w_0\|_{1,2}^2\\
&\leqslant c_M - I(u_0),
\end{aligned}
$$

onde se usa

$$\int_{\mathbb{R}^2}\Big[F(u_0) + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\Big]\,dx = -I(u_0) + \frac{1}{2}\|u_0\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2\,dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2\,dx \leqslant \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)|v_n|^2\,dx,$$

a igualdade (2.39) e a definição de w_0. Isto em conjunto com (2.40) implica (2.38) para n grande.

Agora, tomando $p = (q+\varepsilon)\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2$, segue de (2.38) e do Lema 1.2.1 que

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{(q+\varepsilon)\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2|w_n|^2} - 1)\,dx \leqslant C \tag{2.41}$$

para $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente. Usando (2.6), com $q = 1$, a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev, tem-se

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)(v_n - u_0)\,dx\Big| \leqslant \Big|\int_{\mathbb{R}^2}\Big[(\lambda_1 - \varepsilon)|v_n| + b_1(e^{\alpha_0|v_n|^2} - 1)\Big]\,(v_n - u_0)\,dx\Big|\\
&\leqslant C_1\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|v_n|^2\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|v_n - u_0|^2\Big)^{1/2} + C_2\Big(\int_{\mathbb{R}^2}|v_n - u_0|^{q'}\Big)^{1/q'}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha_0|v_n|^2} - 1)^q\Big)^{1/q}\\
&\leqslant b_1\|v_n\|_2\|v_n - u_0\|_2 + b_2\|v_n - u_0\|_{q'}\Big(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2|w_n|^2} - 1)^q\,dx\Big)^{1/q},
\end{aligned}
$$

onde $q' = q/(q-1)$. Agora, pelo Lema 1.3.2 e (2.41),

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2|w_n|^2} - 1)^q\,dx\Big)^{1/q} \leqslant C.$$

Pelo Lema 2.1.1,

$$\|v_n - u_0\|_2 \to 0 \quad \text{e} \quad \|v_n - u_0\|_{q'} \to 0,$$

donde se conclui

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^2} f(v_n)(v_n - u_0)\, dx\Big| \leqslant C_1\|v_n - u_0\|_2 + C_2\|v_n - u_0\|_{q'} \to 0$$

quando $n \to \infty$. Esta convergência juntamente com o facto de que $I'(v_n)(v_n - u_0) \to 0$ mostra que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_n(\nabla v_n - \nabla v_0)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n(v_n - v_0)\, dx \to 0.$$

E como $v_n \rightharpoonup u_0$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_0(\nabla v_n - \nabla v_0)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0(v_n - v_0)\, dx \to 0.$$

Consequentemente, $v_n \to u_0$ em E. Então, $I(v_n) \to I(u_0) = c_0$, o que contradiz (2.36) e (2.37). Logo, $u_0 \neq u_M$. □

2.4. Sinal das soluções

Para os próximos resultados vai redefinir-se $f(s) = 0$ para $s < 0$. No caso subcrítico, (f_1) ainda é verificado para $s \geqslant s_1$ e, para o caso crítico, (f_2) ainda é verificado para $s \geqslant R_0$. As hipóteses (f_1) e (f_2) foram necessárias para ajudar a verificar a condição de Palais-Smale assim como os Lemas 2.2.2, 2.2.4 e 2.2.5, que continuam a ser válidos para esta não linearidade modificada. Estes resultados fornecem informações quanto ao sinal das soluções, dado o sinal da perturbação $h(x)$.

Proposição 2.4.1. *Suponha-se que f tem crescimento subcrítico ou crítico e as hipóteses (V_1)-(V_2), (f_0)-(f_3) são satisfeitas. Se $h(x) \geqslant 0$ q.t. $x \in \mathbb{R}^2$, então as soluções fracas de (2.1) são não negativas.*

Demonstração. Seja $u \in E$ uma solução fraca de (2.1). Considerando $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = \min\{u, 0\}$, em que $u = u^+ + u^-$ e, tomando $v = u^-$ em (2.15), obtém-se

$$\|u^-\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} hu^-\, dx \leqslant 0,$$

visto que $f(u(x))u^-(x) = 0$ em $\mathbb{R}^2$. Consequentemente, $u = u^+ \geqslant 0$. □

Para o caso $h(x) \leqslant 0$, defina-se a função

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} -f(-s), & \text{se } s > 0 \\ f(s), & \text{se } s \leqslant 0. \end{cases}$$

Proposição 2.4.2. *Sob as hipóteses da Proposição 2.4.1, se $h(x) \leqslant 0$ q.t. $x \in \mathbb{R}^2$, então as soluções fracas de (2.1) são não positivas.*

Demonstração. Considere-se o funcional definido por

$$\widetilde{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{F}(u)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} (-h)u\,dx,$$

onde $\widetilde{F}$ é a primitiva de $\widetilde{f}$. Note-se que $\widetilde{f}$ satisfaz as mesmas hipóteses de f. Como $-h(x) \geqslant 0$ q.t. $x \in \mathbb{R}^2$, pela Proposição 2.4.1, $\widetilde{I}(u)$ tem dois pontos críticos não triviais não negativos. Seja $\widetilde{u}$ um desses pontos críticos, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla\widetilde{u}\nabla v + V(x)\widetilde{u}v)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} \widetilde{f}(\widetilde{u})v\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} hv\,dx = 0, \qquad \forall\, v \in E.$$

Pela construção de $\widetilde{f}$, tem-se que $\widetilde{f}(\widetilde{u}) = -f(-\widetilde{u})$ e, substituindo v por $-v$ na última igualdade, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla(-\widetilde{u})\nabla v + V(x)(-\widetilde{u})v]\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} f(-\widetilde{u})v\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} hv\,dx = 0, \quad \forall\, v \in E,$$

o que implica que $-\widetilde{u}$ é uma solução não positiva de (2.1). □

3. Uma classe de sistemas de equações não lineares com crescimento crítico em $\mathbb{R}^2$

3.1. Apresentação do problema

Em 2014, Albuquerque, Alves e Medeiros [4] estudaram uma classe de equações não lineares da forma

$$-\Delta u + V(|x|)u = Q(|x|)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

onde V e Q são funções radiais ilimitadas ou com decaimento para zero e, $f(s)$ tem crescimento crítico exponencial. Os autores apresentam resultados de existência e multiplicidade de soluções baseados em métodos variacionais e numa desigualdade do tipo Trudinger-Moser. De facto, o resultado de existência vem através do Teorema da Passagem da Montanha sem Palais-Smale (cf. Teorema A.3.4). O resultado de multiplicidade, diz respeito ao problema

$$-\Delta u + V(|x|)u = \lambda Q(|x|)f(u) \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

em que λ é um parâmetro positivo e f é ímpar. Este resultado vem por aplicação duma versão do Teorema da Passagem da Montanha Simétrico (cf. Teoremas A.4.1 e A.4.2), explorando a simetria de f em relação à origem e aproveitando o facto dos *pesos* serem radiais.

A abordagem deste problema é feita de forma análoga à do capítulo 2, e assim como no problema (2.1), as principais dificuldades vêm da possível falta de compacidade dado que o domínio é ilimitado e do crescimento crítico do termo não linear. Enquanto que no problema (2.1) se tinha a dificuldade acrescida de lidar com a perturbação $h(x)$, neste capítulo o foco passa a centrar-se nas dificuldades provenientes dos potenciais ilimitados que obrigam ao estudo de espaços de Sobolev com pesos, assim como uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser em tais espaços.

Comparando os artigos [12] e [4], pode-se ainda observar a analogia entre as condições em que os problemas são estudados referentes à não linearidade, e ainda as relativas aos pesos.

Neste capítulo vai-se provar a existência e multiplicidade de soluções para o sistema de equações elípticas da forma

$$\begin{cases} -\Delta u + V(|x|)u = Q(|x|)f(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^2 \\ -\Delta v + V(|x|)v = Q(|x|)g(u,v) \text{ em } \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde f e g podem ter crescimento crítico por meio da desigualdade de Trudinger-Moser. Considera-se a situação variacional em que

$$(f(u,v), g(u,v)) = \nabla F(u,v)$$

para uma função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, onde ∇F denota o gradiente de F nas variáveis $w = (u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Com vista a uma analogia ao problema escalar, (3.1) é reescrito como

$$-\Delta w + V(|x|)w = Q(|x|)\nabla F(w) \text{ em } \mathbb{R}^2,$$

onde $\Delta = (\Delta, \Delta)$ e $Q(|x|)\nabla F(w) = (Q(|x|)f(w), Q(|x|)g(w))$.

Assim, o problema apresenta a mesma estrutura daquele que foi estudado por Albuquerque, Alves e Medeiros em [4] pelo que, a abordagem é semelhante.

3.2. Resultados preliminares

Ao longo deste capítulo vão supôr-se as seguintes condições sobre os potenciais $V(|x|)$ e $Q(|x|)$:

(V) $V \in C(0,\infty)$, $V(r) > 0$ e existe $a > -2$ tal que

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{V(r)}{r^a} > 0;$$

(Q) $Q \in C(0,\infty)$, $Q(r) > 0$ e existem $b < (a-2)/2$ e $b_0 > -2$ tais que

$$\limsup_{r\to 0} \frac{Q(r)}{r^{b_0}} < \infty \quad \text{e} \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{Q(r)}{r^b} < \infty.$$

Exemplo 3.2.1. *Um exemplo de funções que satisfazem* (V) *e* (Q) *são os potenciais singulares da forma* $V(r) = r^\alpha$ *e* $Q(r) = r^\beta$*, com* $2(\beta + 1) < \alpha < 0$ *e* $\beta > -2$*.*
Tomando $a = \alpha$ *e* $b = b_0 = \beta$*, tem-se que:*

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{r^a}{r^a} = 1 > 0, \qquad \liminf_{r\to 0} \frac{r^{b_0}}{r^{b_0}} = 1 < \infty, \qquad e \qquad \liminf_{r\to+\infty} \frac{r^b}{r^b} = 1 < \infty.$$

Considerem-se ainda, o espaço de Lebesgue com peso V,

$$L^p(\mathbb{R}^2; V) = \Big\{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \text{ u é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^2} V(|x|)|u|^p < \infty\Big\},$$

e o espaço de Lebesgue com peso Q,

$$L^p(\mathbb{R}^2; Q) = \Big\{u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \text{ u é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u|^p < \infty\Big\}.$$

O espaço vectorial

$$H^1_{rad}(\mathbb{R}^2; V) := D^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2; V)$$

que se irá denotar por E, munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^1_{rad}(\mathbb{R}^2;V)} = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(|x|)uv)\, dx, \qquad u, v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2; V), \tag{3.2}$$

é um espaço de Hilbert com peso V. Além disso, associa-se ao produto interno (3.2) a norma

$$\|u\|_{H^1_{rad}(\mathbb{R}^2;V)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2\, dx\Big)^{1/2}, \qquad u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2; V), \tag{3.3}$$

que se irá denotar por $\|\cdot\|$. Considere-se ainda $Z = E \times E$ o espaço produto munido do produto interno seguinte

$$\langle w_1, w_2\rangle_Z = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_1 \nabla u_2 + V(|x|)u_1u_2)\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla v_1 \nabla v_2 + V(|x|)v_1v_2)\, dx,$$

onde $w_1 = (u_1, v_1)$ e $w_2 = (u_2, v_2)$, ao qual corresponde a norma

$$\|w\|_Z = \langle w_1, w_2\rangle_Z^{1/2}.$$

Considere-se agora a seguinte versão do lema radial (cf. Lema A.2.1):

Lema 3.2.1. *Suponha-se que* (V) *é satisfeita. Então, existe* $C > 0$ *tal que para todo* $u \in E$,

$$|u(x)| \leqslant C\|u\||x|^{-(a+2)/4}, \qquad |x| \gg 1. \tag{3.4}$$

Demonstração. Como $C^{\infty}_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$ é denso em E, basta mostrar (3.4) para $u \in C^{\infty}_{0,rad}(\mathbb{R}^2)$. Sejam $\rho = |x|$ e $\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tais que $\varphi(\rho) = u(|x|)$. Como $a > -2$, tem-se que

$$\frac{d}{d\rho}[\rho^{(a+2)/2}\varphi^2(\rho)] = \frac{a+2}{2}\rho^{a/2}\varphi^2(\rho) + 2\rho^{(a+2)/2}\varphi(\rho)\varphi'(\rho) \geqslant 2\rho^{(a+2)/2}\varphi(\rho)\varphi'(\rho). \tag{3.5}$$

De (V) vem que, existem $R_0 > 0$ e $C_0 > 0$ tais que

$$V(|x|) \geqslant C_0|x|^a \text{ para } |x| \geqslant R_0.$$

Integrando (3.5) em $[\rho, \infty[$, com $\rho > R_0$, e aplicando a desigualdade de Hölder vem

$$\begin{aligned}
&\rho^{(a+2)/2}\varphi^2(\rho) \leqslant 2\int_{\rho}^{\infty} s^{(a+2)/2}|\varphi(s)||\varphi'(s)|\,ds \\
&= 2\int_{\rho}^{\infty}(|\varphi'(s)|\sqrt{s})\,(s^{a/2}|\varphi(s)|\sqrt{s})\,ds \leqslant 2\left(\int_{\rho}^{\infty}|\varphi'(s)|^2 s\,ds\right)^{1/2}\left(\int_{\rho}^{\infty}s^a|\varphi(s)|^2 s\,ds\right)^{1/2} \\
&\leqslant 2\left(\int_{\rho}^{\infty}|\varphi'(s)|^2 s\,ds\right)^{1/2}\left(\frac{1}{C_0}\int_{\rho}^{\infty}V(s)\varphi^2(s)s\,ds\right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Observando que

$$\int_{B_\rho^c} u^2(x)\,dx = 2\pi\int_{\rho}^{\infty}\varphi^2(s)s\,ds,$$

e que

$$\int_{B_\rho^c} |\nabla u|^2(x)\,dx = 2\pi\int_{\rho}^{\infty}|\varphi'(s)|^2 s\,ds,$$

(3.6) vem majorado por

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{B_\rho^c}|\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{C_0}}\left(\int_{B_\rho^c}V(|x|)u^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{C_0}\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u|^2+V(|x|)u^2)\,dx.$$

Assim, conclui-se que

$$|x|^{\frac{a+2}{2}}u^2(|x|) \leqslant \frac{1}{\sqrt{C_0}\pi}\|u\|^2, \qquad \forall\,|x| > R_0,$$

ou seja,

$$|u(x)| \leqslant C\|u\||x|^{-(a+2)/4}, \quad \forall\, |x| > R_0,$$

o que completa a demonstração. $\square$

3.2.1. Imersões em espaços de Sobolev com peso

Nesta subsecção, estabelecem-se alguns resultados de imersão. Estes resultados irão substituir o Teorema das Imersões de Sobolev (cf. Teorema A.1.1) e o Lema 2.1.1 que foram usados no Capítulo 2. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ e defina-se $H^1_{rad}(A;V) = \{u_{|_A} : u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^2;V)\}$.

Lema 3.2.2. *([22], Lemmas 3 e 4) Suponha-se que (V)-(Q) são satisfeitas e seja $1 \leqslant p < \infty$. Para qualquer $0 < r < R < \infty$, com $R \geqslant 1$,*

i) as imersões $H^1_{rad}(B_R \setminus B_r; V) \hookrightarrow L^p(B_R \setminus B_r; Q)$ são compactas;

ii) a imersão $H^1_{rad}(B_R;V) \hookrightarrow H^1(B_R)$ é compacta.

Como $H^1(B_R) \hookrightarrow L^p(B_R)$ compactamente, $1 \leqslant p < \infty$, então, como consequência de *ii*), tem-se que $H^1_{rad}(B_R;V)$ está compactamente imerso em $L^q(B_R)$ para todo $1 \leqslant q < \infty$.

Para o próximo resultado de imersão, vai-se precisar do Lema 3.2.2 e de uma desigualdade do tipo Hardy (Teorema A.5.8):

Lema 3.2.3. *Suponha-se que (V)-(Q) são satisfeitas. Então as imersões $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2;Q)$ são compactas para todo $2 \leqslant p < \infty$.*

Demonstração. Para provar a continuidade da imersão, é suficiente mostrar que

$$S_p = \inf_{u\in E} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(|x|)u^2)\, dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u|^p\, dx\right)^{2/p}} > 0.$$

Caso contrário, existiria uma sucessão (u_n) em E tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u_n|^p\, dx = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_n|^2 + V(|x||)|u_n|^2)\, dx = 0. \tag{3.7}$$

Seja então $(u_n) \subset E$ tal que $\|u_n\| \to 0$. Pelas hipóteses (V)-(Q), existem $R_0 > 0$ e $C_0 > 0$ tais que

$$Q(|x|) \leqslant C_0|x|^b \quad \text{para} \quad |x| \geqslant R_0,$$

$$V(|x|) \geqslant C_0|x|^a \quad \text{para} \quad |x| \geqslant R_0.$$

Ora, para $R > R_0$, pelo Lema 3.2.1, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{B_R^c} Q(|x|)|u_n|^p\,dx &\leqslant C_0\int_{B_R^c}|x|^b|u_n|^p\,dx = C_0\int_{B_R^c}|x|^{b-a}|u_n|^{p-2}|x|^a|u_n|^2\,dx\\ &\leqslant C_1\|u_n\|^{p-2}\int_{B_R^c}|x|^{b-a-(p-2)\frac{a+2}{4}}V(|x|)|u_n|^2\,dx.\end{aligned}$$

Como $a > -2$, $b < (a-2)/2 < a$ e $p \geqslant 2$, tem-se que $b-a-(p-2)(a+2)/4 < 0$. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned}\int_{B_R^c} Q(|x|)|u_n|^p\,dx &\leqslant C_1\|u_n\|^{p-2}R^{b-a-(p-2)\frac{a+2}{4}}\int_{B_R^c}V(|x|)|u_n|^2\,dx\\ &\leqslant C_1\|u_n\|^{p-2}R^{b-a-(p-2)\frac{a+2}{4}}\int_{B_R^c}|\nabla u|^2+V(|x|)|u_n|^2\,dx\\ &\leqslant C_1\|u_n\|^{p-2}R^{b-a-(p-2)\frac{a+2}{4}}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u|^2+V(|x|)|u_n|^2\,dx\\ &= C_1R^{b-a-(p-2)\frac{a+2}{4}}\|u_n\|^p = C_1R^{b-a-(p-2)\frac{a+2}{4}}o_n(1).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{B_r^c}Q(|x|)|u_n|^p\,dx = 0$. Por outro lado, a hipótese (Q) também nos dá informação sobre o comportamento de Q na vizinhança da origem, assim existem $0 < r_0 < R_0$ e $C_0 > 0$ tais que

$$Q(|x|) \leqslant C_0|x|^{b_0} \quad \text{para} \quad 0 < |x| < r_0, \quad \text{com} \quad b_0 > -2. \tag{3.9}$$

De seguida, vai estimar-se o integral

$$\int_{B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx,$$

para $0 < r < \min\{r_0, 1/2\}$, onde se irão distinguir dois casos.

Caso 1: $b_0 > 0$. Vem de (3.9) e do Lema 3.2.2, que

$$\begin{aligned}\int_{B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx &\leqslant C_0\int_{B_r}|x|^{b_0}|u_n|^p\,dx \leqslant C_0r^{b_0}\int_{B_r}|u_n|^p\,dx\\ &= C_0r^{b_0}\|u_n\|_p^p \leqslant C_1r^{b_0}\|u_n\|^p = C_1r^{b_0}o_n(1).\end{aligned}$$

Logo $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{B_r}Q(|x|)|u_n|^p\,dx = 0$.

Caso 2: $-2 < b_0 \leqslant 0$. Seja $\delta > 0$ tal que $b_0 - \delta > -2$ e tome-se uma função teste

$\phi \in C_0^\infty(B_1)$, $0 \leqslant \phi \leqslant 1$ em B_1 e $\phi \equiv 1$ em $B_{1/2}$. Através de (3.9), tem-se

$$\begin{aligned}&\int_{B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx \leqslant C_0 \int_{B_r} |x|^{b_0}|u_n|^p\,dx \\ &= C_0 \int_{B_r} |x|^{b_0-\delta}\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{b_0-\delta}|u_n\phi|^{\delta-b_0}|x|^\delta\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\delta-b_0}|u_n|^{p+b_0-\delta}\,dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Observe-se agora que $\lim\limits_{s\to+\infty}\dfrac{\log s}{s^m} = 0$, $\forall\, m > 0$. Assim, existe $s_0 > 0$ tal que se $s > s_0$, $\log s < s^m$. Considerando r suficientemente pequeno vem para $x \in B_r$ que, $\left(\log\dfrac{1}{|x|}\right)^{\delta-b_0} \leqslant \left(\dfrac{1}{|x|}\right)^{m(\delta-b_0)}$, logo $|x|^\delta\left(\log\dfrac{1}{|x|}\right)^{\delta-b_0} \leqslant |x|^{\delta-m(\delta-b_0)}$.

Escolhendo m de tal forma que $\delta-m(\delta-b_0) > 0$ vem $|x|^\delta\left(\log\dfrac{1}{|x|}\right)^{\delta-b_0} \leqslant r^{\delta-m(\delta-b_0)}$.

Assim, voltando a (3.10), tem-se pela desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}&C_0\int_{B_r}|x|^{b_0-\delta}\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{b_0-\delta}|u_n\phi|^{\delta-b_0}|x|^\delta\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{\delta-b_0}|u_n|^{p+b_0-\delta}\,dx \\ &\leqslant C_0 r^{\delta-m(\delta-b_0)}\int_{B_r}|x|^{b_0-\delta}\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{b_0-\delta}|u_n\phi|^{\delta-b_0}|u_n|^{p+b_0-\delta}\,dx \\ &\leqslant C_1 r^{\delta-m(\delta-b_0)}\left[\int_{B_1}|x|^{-2}\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^{-2}|u_n\phi|^2\,dx\right]^{\frac{\delta-b_0}{2}}\left(\int_{B_1}|u_n|^{\frac{2(p+b_0-\delta)}{2+b_0-\delta}}\,dx\right)^{\frac{2+b_0-\delta}{2}}.\end{aligned}$$

Como $u_n\phi \in H_0^1(B_1)$, os lemas 3.2.2 e o Teorema A.5.8 implicam que

$$\int_{B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx \leqslant C_2 r^{\delta-m(\delta-b_0)}\|u_n\|^{\delta-b_0}\|u_n\|^{p+b_0-\delta} = C_2 r^{\delta-m(\delta-b_0)}o_n(1).$$

Portanto, em qualquer um dos casos,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx = 0. \tag{3.11}$$

Agora, escrevendo

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u_n|^p\,dx = \int_{B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx + \int_{B_R\setminus B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx + \int_{B_R^c} Q(|x|)|u_n|^p\,dx,$$

usando (3.8), (3.11) e $i)$ do Lema 3.2.2, tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u_n|^p\,dx = 0,$$

o que contradiz (3.7), provando assim a continuidade da imersão. Quanto à compacidade, seja (u_n) uma sucessão em E tal que $\|u_n\| \leqslant C$. Sem perda de generalidade, suponha-se que $u_n \rightharpoonup 0$ em E. Quer-se provar então que $u_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R}^2; Q)$ para todo $2 \leqslant p < \infty$. Por (3.8), sabe-se que

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|u_n|^p\,dx \leqslant CR^{b-a-(p-2)\frac{a+2}{4}}\|u_n\|^p \leqslant CR^{b-a-(p-2)\frac{a+2}{4}}.$$

Como $b - a - (p-2)(a+2)/4 < 0$, dado $\varepsilon > 0$, para $R > 0$ grande o suficiente, tem-se que

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)|u_n|^p\,dx \leqslant CR^{b-a-(p-2)\frac{a+2}{4}} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.12}$$

Por outro lado, se $b_0 > 0$ então tal como no **Caso 1**, tem-se

$$\int_{B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx \leqslant Cr^{b_0}\|u_n\|^p \leqslant Cr^{b_0}.$$

Assim como no **Caso 2**, se $-2 < b_0 \leqslant 0$ tem-se, para $0 < r < \min\{r_0, 1/2, \delta\}$, que

$$\int_{B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx \leqslant Cr^{\delta}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\delta-b_0}\|u_n\|^p \leqslant Cr^{\delta}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\delta-b_0}.$$

Em qualquer um dos casos,

$$\int_{B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.13}$$

para $r > 0$ pequeno o suficiente. Agora, por $i)$ do Lema 3.2.2, $u_n \to 0$ em $L^p(B_R \setminus B_r; Q)$ para todo $1 \leqslant p < \infty$. Logo, para $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente

$$\int_{B_R\setminus B_r} Q(|x|)|u_n|^p\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.14}$$

De (3.12), (3.13) e (3.14) tem-se que

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^2;Q)} = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u_n|^p\,dx = 0,$$

o que completa a demonstração do lema. □

3.2.2. Desigualdade de Trudinger-Moser em espaços de Sobolev com peso

Para estudar o problema considerado no Capítulo 2 estabeleceu-se um enquadramento que permite obter resultados que controlam o termo não linear através da desigualdade de Trudinger-Moser em domínios ilimitados (cf. Secção 1.3). De forma a seguir a mesma estratégia do Capítulo 2, estabelece-se a seguinte desigualdade tipo Trudinger-Moser no espaço funcional E:

Teorema 3.2.1. *Suponha-se que* (V)*-*(Q) *são satisfeitas. Então, para qualquer* $u \in E$ *e* $\alpha > 0$*, tem-se que* $(e^{\alpha u^2} - 1) \in L^1(\mathbb{R}^2; Q)$*. Além disso, se* $\alpha < \alpha' = \min\{4\pi, 4\pi(1+b_0/2)\}$*, então existe* $C = C(\alpha, a, b, b_0) > 0$ *tal que*

$$\sup_{u \in E; \|u\| \leqslant 1} \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\alpha u^2} - 1) \leqslant C. \tag{3.15}$$

Demonstração. Por (Q), existem $0 < r_0 < R_0$ e $C_0 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} Q(|x|) &\leqslant C_0|x|^b \quad &\text{para} \quad &|x| \geqslant R_0, \\ Q(|x|) &\leqslant C_0|x|^{b_0} \quad &\text{para} \quad &0 < |x| \leqslant r_0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Seja $R > 0$ que será escolhido mais tarde e escreva-se o integral em (3.15) da seguinte forma

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\alpha u^2} - 1)\, dx = \int_{B_R} Q(|x|)(e^{\alpha u^2} - 1)\, dx + \int_{B_R^c} Q(|x|)(e^{\alpha u^2} - 1)\, dx. \tag{3.17}$$

Estime-se então cada um dos integrais em (3.17). Para o integral em B_R, há dois casos a considerar:

Caso 1: $b_0 \geqslant 0$. Da segunda desigualdade em (3.16) e da continuidade de $Q(r)$, existe $C > 0$ tal que

$$\int_{B_R} Q(|x|)(e^{\alpha u^2} - 1)\, dx \leqslant \int_{B_R} C_0|x|^{b_0}(e^{\alpha u^2} - 1)\, dx \leqslant C \int_{B_R} e^{\alpha u^2}\, dx,$$

onde C é uma constante que depende de R. Seja $v \in H_0^1(B_R)$ definido por

$$v(x) = u(x) - u(R),$$

para $x \in B_R$. Então pela desigualdade de Young, para cada $\varepsilon > 0$ dado, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$u^2(x) \leqslant (1 + \varepsilon)v^2(x) + (1 + C_\varepsilon)u^2(R).$$

Logo, fixando

$$R \gg \max\{1, R_0, \Big[(1+C_\varepsilon)C^2\Big]^{2/(a+2)}\},$$

em que C é a constante do Lema 3.2.1. De facto, note-se que R foi fixado de forma a estarmos nas condições do Lema 3.2.1, pelo que segue desse mesmo lema que

$$u^2(x) \leqslant (1+\varepsilon)v^2(x) + (1+C_\varepsilon)C^2R^{-(a+2)/2}\|u\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)v^2(x) + \|u\|^2.$$

Portanto,

$$\int_{B_R} Q(|x|)(e^{\alpha u^2}-1)\,dx \leqslant C\int_{B_R} e^{\alpha[(1+\varepsilon)v^2+\|u\|^2]}\,dx = Ce^{\alpha\|u\|^2}\int_{B_R} e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2}\,dx. \quad (3.18)$$

Como $v \in H_0^1(B_R)$, $\|v\|_{H_0^1(B_R)} = \|\nabla v\|_{L^2(B_R)} \leqslant \|u\| \leqslant 1$ e, como neste caso se tem $\alpha < 4\pi$, pode-se tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(1+\varepsilon) \leqslant 4\pi$. Então, pode-se usar a desigualdade de Trudinger-Moser clássica, ou seja, pelo Teorema 1.2.1, tem-se

$$\sup_{v\in H_0^1(B_R);\|v\|_{H_0^1(B_R)}\leqslant 1}\int_{B_R} e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2}\,dx \leqslant C.$$

Logo, de (3.18), tem-se

$$\sup_{u\in E;\|u\|\leqslant 1}\int_{B_R} Q(|x|)(e^{\alpha u^2}-1)\,dx \leqslant C(\alpha).$$

Caso 2: $-2 < b_0 < 0$. Como $0 < r_0 < R_0 < R$, escreve-se

$$\begin{aligned}\int_{B_R} Q(|x|)(e^{\alpha u^2}-1)\,dx &= \int_{B_{r_0}} Q(|x|)(e^{\alpha u^2}-1)\,dx + \int_{B_R\setminus B_{r_0}} Q(|x|)(e^{\alpha u^2}-1)\,dx\\ \leqslant C_0\int_{B_{r_0}} |x|^{b_0}e^{\alpha u^2}\,dx + C\int_{B_R\setminus B_{r_0}} e^{\alpha u^2}\,dx &\leqslant C_0\int_{B_R} |x|^{b_0}e^{\alpha u^2}\,dx + C\int_{B_R} e^{\alpha u^2}\,dx,\end{aligned}$$

onde se usa mais uma vez a continuidade de $Q(r)$ e a segunda desigualdade em (3.16). Por cálculos semelhantes aos usados acima, tem-se

$$\int_{B_R} |x|^{b_0}e^{\alpha u^2}\,dx = \int_{B_R} \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^{-b_0}}\,dx \leqslant e^{\alpha\|u\|^2}\int_{B_R} \frac{e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2}}{|x|^{-b_0}}\,dx. \quad (3.19)$$

Como neste caso $\alpha < 4\pi(1+b_0/2)$, pode-se tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha(1+\varepsilon) \leqslant 4\pi(1+b_0/2)$. Então, como $v \in H_0^1(B_R)$, $\|v\|_{H_0^1(B_R)} = \|\nabla v\|_{L^2(B_R)} \leqslant \|u\| \leqslant 1$ e $-b_0 \in (0,2)$, vai-se usar a desigualdade de Adimurthi-Sandeep (Teorema 1.4.1), pois tem-se um peso singular na função integranda, que afirma que

$$\sup_{v \in H_0^1(B_R); \|v\|_{H_0^1(B_R)} \leqslant 1} \int_{B_R} \frac{e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2}}{|x|^{-b_0}} \, dx \leqslant C(\alpha, b_0).$$

Usando isto em (3.19), obtém-se

$$\sup_{u \in E; \|u\| \leqslant 1} \int_{B_R} \frac{e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2}}{|x|^{-b_0}} \, dx \leqslant C(\alpha, b_0).$$

Portanto, em ambos os casos tem-se

$$\sup_{u \in E; \|u\| \leqslant 1} \int_{B_R} Q(|x|)(e^{\alpha u^2} - 1) \, dx \leqslant C(\alpha, b_0). \tag{3.20}$$

De seguida, estima-se o segundo integral em (3.17). Da primeira desigualdade em (3.16) e do Teorema da Convergência Monótona vem que, para qualquer $u \in E$,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_R^c} Q(|x|)(e^{\alpha u^2} - 1) \, dx \leqslant C_0 \int_{B_R^c} |x|^b (e^{\alpha u^2} - 1) \, dx \\
&= C_0 \int_{B_R^c} |x|^b \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j u^{2j}}{j!} \, dx \leqslant C_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \int_{B_R^c} |x|^b u^{2j} \, dx.
\end{aligned}$$

O Lema 3.2.1 para u^{2j} diz que $|u(x)|^{2j} \leqslant (C\|u\||x|^{-(a+2)/4})^{2j} = (C\|u\|)^{2j}|x|^{-j(a+2)/2}$, que aplicado na última desigualdade dá que

$$\begin{aligned}
C_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} \int_{B_R^c} |x|^b u^{2j} \, dx &\leqslant C_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} (C\|u\|)^{2j} \int_{B_R^c} |x|^{b - j\frac{a+2}{2}} \, dx \\
&= 2\pi C_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j}{j!} (C\|u\|)^{2j} \int_R^{\infty} s^{1+b-j\frac{a+2}{2}} \, ds \\
&\leqslant \frac{2\pi C_0}{\left(\frac{a-2}{2} - b\right) R^{\frac{a-2}{2} - b}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha C^2 \|u\|^2)^j}{j!} \\
&= \frac{2\pi C_0}{\left(\frac{a-2}{2} - b\right) R^{\frac{a-2}{2} - b}} \left(e^{\alpha C^2 \|u\|^2} - 1\right) < \infty, \qquad \forall \, u \in E.
\end{aligned}$$

Para a última desigualdade usou-se o facto de que $b < (a-2)/2$, $j \geqslant 1$ e $R > 1$, que implicam

$$\int_R^\infty s^{1+b-j\frac{a+2}{2}}\,ds \leqslant \int_R^\infty s^{1+b-\frac{a+2}{2}}\,ds = \frac{-R^{b-\frac{a-2}{2}}}{b-\frac{a-2}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{a-2}{2}-b\right)R^{\frac{a-2}{2}-b}}.$$

Como

$$\sup_{u\in E;\|u\|\leqslant 1}\int_{B_R^c} Q(|x|)(e^{\alpha u^2}-1)\,dx \leqslant C(\alpha,a,b), \tag{3.21}$$

então, de (3.20) e (3.21), tem-se que

$$\sup_{u\in E;\|u\|\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\alpha u^2}-1)\,dx \leqslant C(\alpha,a,b,b_0),$$

o que completa a demonstração do teorema. □

A partir deste teorema, estabelece-se o seguinte resultado no espaço Z:

Corolário 3.2.1. *Suponha-se que (V)-(Q) são satisfeitas. Seja (w_n) uma sucessão em Z com $\|w_n\|_Z = 1$ e suponha-se que $w_n \rightharpoonup w$ em Z com $\|w\|_Z < 1$. Então para cada $0 < \beta < \frac{\alpha'}{2}(1-\|w\|_Z^2)^{-1}$ (α' definido no Teorema 3.2.1.), a menos de subsucessão, tem-se*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\beta|w_n|^2}-1) < +\infty.$$

Demonstração. Como $w_n \rightharpoonup w$ em Z e $\|w_n\|_Z = 1$, conclui-se que

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n-w\|_Z^2 = \lim_{n\to\infty}(\|w_n\|^2 - 2\langle w_n, w\rangle_Z^2 + \|w\|_Z^2) = 1-\|w\|_Z^2 < \frac{\alpha'}{2\beta}.$$

Portanto, para $n\in\mathbb{N}$ grande, tem-se

$$2\beta\|w_n-w\|_Z^2 < \alpha'.$$

Agora, escolhendo $r_1 > 1$ perto de 1 e $\varepsilon > 0$ que satisfaçam

$$2r_1\beta(1+\varepsilon^2)\|w_n-w\|_Z^2 < \alpha',$$

a desigualdade de Young e o Teorema 3.2.1, considerando $w_n = (u_n, v_n)$ implicam que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} Q\left(e^{r_1\beta(1+\varepsilon^2)|w_n-w|^2} - 1\right) dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} Q^{1/2}\left(e^{r_1\beta(1+\varepsilon^2)|u_n-u|^2} - 1\right) Q^{1/2}\left(e^{r_1\beta(1+\varepsilon^2)|v_n-v|^2} - 1\right) dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2}Q\left(e^{r_1\beta(1+\varepsilon^2)|u_n-u|^2} - 1\right)^2 + \frac{1}{2}Q\left(e^{r_1\beta(1+\varepsilon^2)|v_n-v|^2} - 1\right)^2 dx \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} Q\left(e^{2r_1\beta(1+\varepsilon^2)\|w_n-w\|_Z^2\left(\frac{|u_n-u|}{\|w_n-w\|_Z}\right)^2} - 1\right) dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} Q\left(e^{2r_1\beta(1+\varepsilon^2)\|w_n-w\|_Z^2\left(\frac{|v_n-v|}{\|w_n-w\|_Z}\right)^2} - 1\right) dx \leqslant C.
\end{aligned}$$

Além disso, como por cálculos análogos aos da demonstração do Lema 1.3.2,

$$\beta|w_n|^2 \leqslant \beta(1+\varepsilon^2)|w_n - w|^2 + \beta(1 + 1/\varepsilon^2)|w|^2,$$

vem da desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} Q\left(e^{\beta|w_n|^2} - 1\right) dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} Q\left(e^{\beta(1+\varepsilon^2)|w_n-w|^2+\beta(1+1/\varepsilon^2)|w|^2} - 1\right) dx \\
&\leqslant \frac{1}{r_1}\int_{\mathbb{R}^2} Q\left(e^{r_1\beta(1+\varepsilon^2)|w_n-w|^2} - 1\right) dx + \frac{1}{r_2}\int_{\mathbb{R}^2} Q\left(e^{r_2\beta(1+1/\varepsilon^2)|w|^2} - 1\right) dx \leqslant C
\end{aligned}$$

para $n \in \mathbb{N}$ grande e $r_2 = r_1/(r_1 - 1)$. Logo, o resultado fica provado. □

3.3. Enquadramento variacional

Para estabelecer o enquadramento no qual as soluções podem ser estudadas naturalmente por métodos variacionais, vão ser introduzidas hipóteses sobre o termo não linear. É de notar a analogia com as hipóteses (f_{α_0}) e (f_0)-(f_2).

(F_{α_0}) f e g têm *crescimento crítico exponencial*, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|w|\to+\infty} \frac{|f(w)|}{e^{\alpha|w|^2}} = \lim_{|w|\to+\infty} \frac{|g(w)|}{e^{\alpha|w|^2}} = \begin{cases} 0, & \forall\, \alpha > \alpha_0, \\ +\infty & \forall\, \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

(F_1) $f(w) = o(|w|)$ e $g(w) = o(|w|)$ quando $|w| \to 0$;

(F_2) existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(w) \leqslant w \cdot \nabla F(w), \ \forall\, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\};$$

(F_3) existem constantes $R_0, M_0 > 0$ tais que

$$0 < F(w) \leqslant M_0 |\nabla F(w)|, \ \forall\, |w| \geqslant R_0;$$

(F_4) existem $\nu > 2$ e $\mu > 0$ tais que

$$F(w) \geqslant \frac{\mu}{\nu} |w|^{\nu}, \ \forall\, w \in \mathbb{R}^2.$$

Lema 3.3.1. *Considerem-se as hipóteses (F_{α_0})-(F_4). Então, para $w \in Z$, o funcional associado ao sistema (3.1),*

$$I(w) = \frac{1}{2}\|w\|_Z^2 - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|) F(w)\, dx$$

está bem definido e é de classe C^1 em Z, com derivada dada por

$$I'(w)z = \langle w, z \rangle - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|) z \cdot \nabla F(w)\, dx.$$

Demonstração. Por (F_1), para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|\nabla F(w)| = \sqrt{|f(w)|^2 + |g(w)|^2} \leqslant \varepsilon |w|, \qquad \forall\, |w| < \delta.$$

Por outro lado, para $\alpha > \alpha_0$, a condição (F_{α_0}) garante que

$$\lim_{|w| \to +\infty} \frac{|f(w)|}{(e^{\alpha |w|^2} - 1)} = \lim_{|w| \to +\infty} \frac{|f(w)|}{e^{\alpha |w|^2}} \frac{e^{\alpha |w|^2}}{e^{\alpha |w|^2} - 1} = 0,$$

e que

$$\lim_{|w| \to +\infty} \frac{|g(w)|}{(e^{\alpha |w|^2} - 1)} = \lim_{|w| \to +\infty} \frac{|g(w)|}{e^{\alpha |w|^2}} \frac{e^{\alpha |w|^2}}{e^{\alpha |w|^2} - 1} = 0,$$

o que implica que existem $C_0, C_1 > 0$ tais que

$$|f(w)| \leqslant C_0 (e^{\alpha |w|^2} - 1) \quad \text{ e } \quad |g(w)| \leqslant C_1 (e^{\alpha |w|^2} - 1), \qquad \forall\, |w| \geqslant \delta.$$

Portanto, para todo $w \in \mathbb{R}^2$ tem-se

$$|\nabla F(w)| \leqslant \varepsilon|w| + |f(w)| + |g(w)| \leqslant \varepsilon|w| + C(e^{\alpha|w|^2} - 1). \tag{3.22}$$

Assim, usando (F_2), (3.22) e a desigualdade de Hölder, tem-se, com $w_n = (u_n, v_n)$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|F(w)|\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)\frac{1}{\theta} w \cdot |\nabla F(w)|\,dx\\
&\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w|^2\,dx + C\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w|(e^{\alpha|w|^2} - 1)\,dx\\
&\leqslant \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)u^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)v^2\,dx\right)\\
&+ C\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w|^r\,dx\right)^{1/r}\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{s\alpha|w|^2} - 1)\,dx\right)^{1/s},
\end{aligned}$$

com $r, s \geqslant 1$ tais que $1/r + 1/s = 1$. Considerando o Lema 3.2.3, tem-se para $r \geqslant 4$ que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w|^r\,dx\right)^{1/r} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w|^{2\frac{r}{2}}\,dx\right)^{1/r} = \|w^2\|^{1/2}_{L^{r/2}(\mathbb{R}^2;Q)}\\
&= \|u^2 + v^2\|^{1/2}_{L^{r/2}(\mathbb{R}^2;Q)} \leqslant C\|u^2 + v^2\|^{1/2} = C\|w\|_Z < \infty.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Young e o Teorema 3.2.1,

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{s\alpha|w|^2} - 1)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2s\alpha u^2} - 1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2s\alpha v^2} - 1)\,dx < \infty. \tag{3.23}$$

Logo, $Q(|x|)F(w) \in L^1(\mathbb{R}^2)$, o que implica que I está bem definido para $\alpha > \alpha_0$. Veja-se agora que $I \in C^1(Z, \mathbb{R})$ com

$$I'(w)z = \langle w, z\rangle - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)z \cdot \nabla F(w)\,dx$$

para todo $z \in Z$. Uma vez que se procuram soluções fracas do sistema (3.1), isto é, funções $w \in Z$ tais que

$$\langle w, z\rangle - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)z \cdot \nabla F(w)\,dx = 0,$$

para todo $z \in Z$, conclui-se que pontos críticos do funcional I são precisamente as soluções pretendidas e vice-versa. Seja

$$\Phi(w) = \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx,$$

pela definição de derivada de Gâteaux, tem-se

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(w) = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^2} Q\frac{F(w+tz)-F(w)}{t}\,dx.$$

Definindo

$$h_t(x) = Q(|x|)\frac{F(w(x)+tz(x))-F(w(x))}{t},\ x\in\mathbb{R}^2,$$

pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta_t(x)\in[w(x),w(x)+tz(x)]$ (ou $\theta_t(x)\in[w(x)+tz(x),w(x)]$), com $x\in\mathbb{R}^2$, tal que

$$h_t(x) = Q(|x|)z\cdot\nabla F(\theta_t(x)),\ x\in\mathbb{R}^2,$$

Logo, por (3.22) e pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}|h_t| &\leqslant \varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^2}Q(|x|)|z|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^2}Q(|x|)|\theta_t|^2\,dx\right)\\ &+C\left(\int_{\mathbb{R}^2}Q(|x|)|z|^r\,dx\right)^{1/r}\left(\int_{\mathbb{R}^2}Q(|x|)(e^{s\alpha|\theta_t|^2}-1)\,dx\right)^{1/s},\end{aligned}$$

com $1/r+1/s=1$. Tendo em conta o Lema 3.2.3 e o Teorema 3.2.1, vem que $h_t\in L^1(\mathbb{R}^2)$. Por outro lado,

$$\lim_{t\to 0}h_t = Q(|x|)z\cdot\nabla F(w).$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}(w) = \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^2}h_t\,dx = \int_{\mathbb{R}^2}Q(|x|)z\cdot\nabla F(w)\,dx.$$

Agora, como $\frac{\partial\Phi}{\partial(\cdot)}(w)\in Z'$, para cada $w\in Z$, só falta verificar que

$$w_n\to w \text{ em } Z\ \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial(\cdot)}(w_n)\to\frac{\partial\Phi}{\partial(\cdot)}(w) \text{ em } Z'$$

para concluir a diferenciabilidade de Φ. Como $w_n=(u_n,v_n)\to w=(u,v)$ em Z, tem-se $u_n\to u$ e $v_n\to v$ em E. Logo, pelo Lema 3.2.3,

$$u_n\to u \text{ e } v_n\to v \text{ em } L^p(\mathbb{R}^2;Q),$$

para todo $2\leqslant p<\infty$. Assim, a menos de uma subsucessão, $w_n(x)=(u_n(x),v_n(x))\to w(x)=(u(x),v(x))$ q.t. $x\in\mathbb{R}^2$. Além disso, existem $h_1,h_2\in L^1(\mathbb{R}^2)$ tais que $|u_n(x)|\leqslant$

$h_1(x)$ e $|v_n(x)| \leqslant h_2(x)$ q.t. $x \in \mathbb{R}^2$. Portanto, definindo

$$G_n(x) = Q(|x|)z(x) \cdot \nabla F(w_n(x)),\ x \in \mathbb{R}^2,$$

conclui-se que $G_n(x) \to G(x) = Q(|x|)z(x) \cdot \nabla F(w(x))$, q.t. $x \in \mathbb{R}^2$. Através de cálculos semelhantes aos usados para verificar que I está bem definido, obtém-se ainda que $G_n(x) \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Logo, mais uma vez pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, com $w = (u, x)$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} G_n(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} G(x)\, dx.$$

Assim, para cada $z \in Z$, tem-se

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}(w_n) \to \frac{\partial \Phi}{\partial z}(w) \ \text{ em } \ Z',$$

que prova assim que $I \in C^1(Z, \mathbb{R})$ e completa a demonstração. □

No próximo lema, estabelece-se que o funcional I satisfaz as condições geométricas do Teorema A.3.3.

Lema 3.3.2. *Suponha-se que* (V)-(Q) *são satisfeitas. Se* (F_{α_0})-(F_2) *forem satisfeitas, então:*
i) Existem $\tau, \rho > 0$ *tais que* $I(w) \geqslant \tau$ *quando* $\|w\|_Z = \rho$*;*
ii) Existe $e_* \in Z$ *com* $\|e_*\|_Z > \rho$*, tal que* $I(e_*) < 0$*.*

Demonstração. Assim como na demonstração de (3.22), tem-se

$$|\nabla F(w)| \leqslant \varepsilon |w| + C|w|^{q-1}(e^{\alpha |w|^2} - 1) \tag{3.24}$$

para todo $w \in \mathbb{R}^2$ e $q \geqslant 1$. Logo, usando (F_2), a desigualdade de Hölder e o Lema 3.2.3, tem-se

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|F(w)|\, dx \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w|^2\, dx + C\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w|^q (e^{\alpha|w|^2} - 1)\, dx \\
&\leqslant \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)u^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)v^2\, dx \right) \\
&+ C\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w|^{qr}\, dx \right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{s\alpha|w|^2} - 1)\, dx \right)^{1/s} \\
&\leqslant C\varepsilon \|w\|_Z^2 + C_0 \|w\|_Z^q \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{s\alpha|w|^2} - 1)\, dx \right)^{1/s},
\end{aligned}$$

com $r \geqslant 2$ (pelo Lema 3.2.3), e $s \geqslant 1$ tais que $1/r + 1/s = 1$. Ora, recordando que $\alpha' = \min\{4\pi, 4\pi(1+b_0/2)\}$, tome-se $\|w\|_Z \leqslant M < (\alpha'/2\alpha)^{1/2}$. Então,

$$2\alpha\|u\|^2 \leqslant 2\alpha M^2 < \alpha' \quad \text{e} \quad 2\alpha\|v\|^2 \leqslant 2\alpha M^2 < \alpha'.$$

Vem de (3.23) que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{s\alpha|w|^2} - 1)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2s\alpha u^2} - 1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2s\alpha v^2} - 1)\,dx.$$

Escolhendo s perto o suficiente de 1 tal que,

$$2s\alpha\|u\|^2 \leqslant 2\alpha M^2 < \alpha' \quad \text{e} \quad 2s\alpha\|v\|^2 \leqslant 2\alpha M^2 < \alpha',$$

vem que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{s\alpha|w|^2} - 1)\,dx \leqslant C.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|F(w)|\,dx \leqslant C\varepsilon\|w\|_Z^2 + C_1\|w\|_Z^q,$$

logo

$$I(w) \geqslant \left(\frac{1}{2} - C\varepsilon\right)\|w\|_Z^2 - C_1\|w\|_Z^q,$$

o que implica $i)$ para $q > 2$. De modo a provar $ii)$, considere-se $w \in Z$ uma função com suporte compacto. Então, usando (F_4), tem-se

$$I(tw) \leqslant \frac{t^2}{2}\|w\|^2 - Ct^\nu \int_{\text{supp }(w)} Q(|x|)|w|^\nu\,dx,$$

para todo $t > 0$. Consequentemente $I(tw) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$, desde que $\nu > 2$. Pondo $e_* = t_* w$ com $t_* > 0$ grande o suficiente, conclui-se a demonstração do lema. $\square$

Observação 3.3.1. *Note-se a analogia nas demonstrações dos Lema 2.2.2 e Lema 3.3.2, onde se estabelece as condições geométricas do Teorema da Passagem da Montanha (cf. Teorema A.3.3.), sendo que neste último, é necessário lidar com a dificuldade acrescida do termo com peso Q.*

Com vista a provar que uma sucessão de Palais-Smale converge para a solução fraca do problema (3.1), vão-se estabelecer os seguintes lemas:

Lema 3.3.3. *Suponha-se que* (F_2) *é satisfeita. Seja* (w_n) *uma sucessão em* Z *tal que*

$$I(w_n) \to c \quad e \quad I'(w_n) \to 0.$$

Então

$$\|w_n\|_Z \leqslant C, \quad \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w_n)\,dx \leqslant C \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)w_n \cdot \nabla F(w_n)\,dx \leqslant C.$$

Demonstração. Seja (w_n) uma sucessão em Z tal que $I(w_n) \to c$ e $I'(w_n) \to 0$. Então, para qualquer $z \in Z$,

$$I(w_n) = \frac{1}{2}\|w_n\|_Z^2 - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w_n)\,dx = c + o_n(1) \tag{3.25}$$

e

$$I'(w_n)z = \langle w_n, z\rangle_Z - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)z \cdot \nabla F(w_n)\,dx = o_n(1). \tag{3.26}$$

Tomando $z = w_n$ em (3.26) e usando (F_2), tem-se

$$\begin{aligned} c + \|w_n\|_Z + o_n(1) &\geqslant I(w_n) - \frac{1}{\theta}I'(w_n)w_n \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|w_n\|_Z^2 + \int_{\mathbb{R}^2} Q\left[\frac{1}{\theta}w_n \cdot \nabla F(w_n) - F(w_n)\right]dx \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\|w_n\|_Z^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\|w_n\|_Z \leqslant C$. De (3.25) e (3.26) tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w_n)\,dx \leqslant C \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)w_n \cdot \nabla F(w_n)\,dx \leqslant C,$$

o que prova o lema. $\square$

Também se irá usar o seguinte resultado de convergência:

Lema 3.3.4. *Suponha-se que* (F_2)*-*(F_3) *são satisfeitas. Se* $(w_n) \subset Z$ *for uma sucessão de Palais-Smale para* I *e* w_0 *o seu limite fraco, então, a menos de subsucessão,*

$$\nabla F(w_n) \to \nabla F(w_0) \quad em \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)$$

e

$$F(w_n) \to F(w_0) \quad em \quad L^1(\mathbb{R}^2;Q).$$

Demonstração. Suponha-se que (w_n) é uma sucessão de Palais-Smale. Pelo Lema 3.3.2, $\|w_n\|_Z \leqslant C$, logo $w_n = (u_n, v_n) \rightharpoonup w_0 = (u_0, v_0)$ em Z, isto é, $u_n \rightharpoonup u_0$ e $v_n \rightharpoonup v_0$ em E. Logo, relembrando que $H^1_{rad}(B_R; V) \hookrightarrow L^1(B_R)$ compactamente para todo $1 \leqslant q < \infty$ e $R > 0$ (consequência de ii) do Lema 3.2.2), a menos de uma subsucessão, pode-se supor que $u_n \to u_0$ e $v_n \to v_0$ em $L^1(B_R)$. Portanto, $w_n \to w_0$ em $L^1(B_R; \mathbb{R}^2)$ e $w_n(x) \to w_0(x)$ q.t. $x \in \mathbb{R}^2$. Como $\nabla F(w_n) \in L^1(B_R; \mathbb{R}^2)$, a primeira convergência segue do Lema A.5.3. Assim,

$$f(w_n) \to f(w_0) \quad \text{e} \quad g(w_n) \to g(w_0) \quad \text{em} \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Logo, existem $h_1, h_2 \in L^1(B_R)$ tais que $Q(|x|)|f(w_n)| \leqslant h_1$ e $Q(|x|)|g(w_n)| \leqslant h_2$ q.t. $x \in B_R$. De (F_3) pode concluir-se que

$$|F(w_n)| \leqslant \sup_{[-R_0, R_0]} |F(w_n)| + M_0 |\nabla F(w_n)|,$$

q.t. $x \in B_R$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$F(w_n) \to F(w_0) \quad \text{em} \quad L^1(B_R; Q).$$

É preciso agora provar a convergência em B_R^c. Ora, por (3.24) com $q = 2$ tem-se

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)F(w_n)\,dx \leqslant \varepsilon \int_{B_R^c} Q(|x|)|w_n|^2\,dx + C \int_{B_R^c} Q(|x|)|w_n|(e^{\alpha|w_n|^2} - 1)\,dx, \quad (3.27)$$

para $\alpha > \alpha_0$. Do Lema 3.2.3, da desigualdade de Hölder, de $\|w_n\|_Z \leqslant C$ e por cálculos semelhantes aos da estimativa do segundo integral em (3.17), tem-se

$$\varepsilon \int_{B_R^c} Q(|x|)|w_n|^2\,dx \leqslant C\varepsilon \quad \text{e} \quad \int_{B_R^c} Q(|x|)|w_n|(e^{\alpha|w_n|^2} - 1)\,dx \leqslant \frac{C}{R^\xi},$$

para algum $\xi > 0$. Assim, dado $\delta > 0$, existe $R > 0$ grande o suficiente tal que

$$\varepsilon \int_{B_R^c} Q(|x|)|w_n|^2\,dx < \delta \quad \text{e} \quad \int_{B_R^c} Q(|x|)|w_n|(e^{\alpha|w_n|^2} - 1)\,dx < \delta.$$

Portanto, de (3.27)

$$\int_{B_R^c} Q(|x|)F(w_n)\,dx \leqslant C\delta \quad \text{e} \quad \int_{B_R^c} Q(|x|)F(w_0)\,dx \leqslant C\delta.$$

Por fim, como

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w_n)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w_0)\,dx\right|$$
$$\leqslant \left|\int_{B_R} Q(|x|)F(w_n)\,dx - \int_{B_R} Q(|x|)F(w_0)\,dx\right| + \int_{B_R^c} Q(|x|)F(w_n)\,dx + \int_{B_R^c} Q(|x|)F(w_0)\,dx,$$

tem-se
$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w_n)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w_0)\,dx\right| \leqslant C\delta.$$
Como δ é arbitrário, o resultado segue e o lema fica provado. □

Tendo em conta o Lema 3.3.2, o nível de minimax

$$c = \inf_{g\in\Gamma}\max_{0\leqslant t\leqslant 1} I(g(t))$$

é positivo, onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], Z) : g(0) = 0 \ e\ I(g(1)) < 0\}$. Logo, pelo Teorema A.3.4, existe uma sucessão de $(PS)_c$, (w_n) em Z, isto é,

$$I(w_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(w_n) \to 0. \tag{3.28}$$

Lema 3.3.5. *Se*
$$\mu > \left[\frac{2\alpha_0(\nu-2)}{\alpha'\nu}\right]^{(\nu-2)/2} S_\nu^{\nu/2},$$
então tem-se $c < \frac{\alpha'}{4\alpha_0}$ para o nível de minimax c, onde $S_\nu > 0$ denota a melhor constante da imersão de Sobolev $E \hookrightarrow L^\nu(\mathbb{R}^2; Q)$ (ver Lema 3.2.3), e ν, μ de acordo com (F_4).

Demonstração. Como as imersões $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^2; Q)$ são compactas para todo $2 \leqslant p < \infty$, existe, para $p = \nu$, uma função $\overline{u} \in E$ tal que

$$S_\nu = \|\overline{u}\|^2 \quad \text{e} \quad \|\overline{u}\|_{L^\nu(\mathbb{R}^2;Q)} = 1.$$

Logo, considerando $\overline{w} = (\overline{u}, \overline{u})$, pela definição de c e (F_4), tem-se que $\|\overline{w}\|_Z^2 = 2\|\overline{u}\|^2$, e assim,

$$c \leqslant \max_{t\geqslant 0}\left[S_\nu t^2 - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(t\overline{w})\,dx\right] \leqslant \max_{t\geqslant 0}\left[S_\nu t^2 - \frac{\mu}{\nu}t^\nu \int_{\mathbb{R}^2} Q\overline{w}^\nu\,dx\right]$$
$$\leqslant \max_{t\geqslant 0}\left[S_\nu t^2 - \frac{2^{\nu/2}\mu}{\nu}t^\nu\right]$$

Vendo que

$$\frac{d}{dt}\left[S_\nu t^2 - \frac{2^{\nu/2}\mu}{\nu}t^\nu\right] = 0 \iff 2S_\nu t - 2^{\nu/2}\mu t^{\nu-1} = 0 \iff$$
$$t^{\nu-2} = \frac{2^{1-(\nu/2)}S_\nu}{\mu} \iff t = \frac{2^{-1/2}S_\nu^{1/(\nu-2)}}{\mu^{1/(\nu-2)}}$$

vem

$$\max_{t\geqslant 0}\left[S_\nu t^2 - \frac{2^{\nu/2}\mu}{\nu}t^\nu\right] = \frac{\nu-2}{2\nu}\frac{S_\nu^{\nu/(\nu-2)}}{\mu^{2/(\nu-2)}} < \frac{\alpha'}{4\alpha_0},$$

o que prova o lema. □

3.4. Resultados principais

Assim como no caso escalar não homogéneo, tem-se o seguinte resultado de existência para o sistema (3.1) baseado no Teorema A.3.4:

Teorema 3.4.1. *Suponha-se* (V)-(Q)*. Se* (F_{α_0})-(F_4) *forem satisfeitas, então o sistema (3.1) tem uma solução fraca não trivial* w_0 *em* Z *desde que*

$$\mu > \left[\frac{2\alpha_0(\nu-2)}{\alpha'\nu}\right]^{(\nu-2)/2} S_\nu^{\nu/2},$$

onde $\alpha' = \min\{4\pi, 4\pi(1+b_0/2)\}$.

Demonstração. Quer-se provar que o funcional $I(w) = \frac{1}{2}\|w\|_Z^2 - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx$ admite um ponto crítico w_0 de tipo passagem da montanha. Seja (w_n) nas condições (3.28). Ora, segue dos Lemas 3.3.3 e 3.3.4 que a sucessão de Palais-Smale (w_n) é limitada e converge fracamente para uma solução fraca do sistema (3.1) denotada por w_0. O objectivo é então ver que $w_0 \neq 0$. Suponha-se por contradição que $w_0 \equiv 0$. Então, o Lema 3.3.4 implica que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w_n)\,dx = 0.$$

Como $I(w_n) = \frac{1}{2}\|w_n\|_Z^2 - \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w_n)\,dx = c + o_n(1)$, vem por (3.25), que

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n\|_Z^2 = 2c > 0. \tag{3.29}$$

Daqui e do Lema 3.3.5, dado $\varepsilon > 0$, tem-se que

$$\|w_n\|_Z^2 \leqslant 2c + \varepsilon < 2\frac{\alpha'}{4\alpha_0} + \varepsilon = \frac{\alpha'}{2\alpha_0} + \varepsilon,$$

para $n \in \mathbb{N}$ grande. Logo, é possível escolher $s > 1$ perto o suficiente de 1 e $\alpha > \alpha_0$ perto de α_0 tais que $s\alpha\|w_n\|_Z^2 \leqslant \beta' < \alpha'/2$, o que implica que considerando $w_n = (u_n, v_n)$,

$$2s\alpha\|u_n\|^2 \leqslant 2\beta' < \alpha' \quad \text{e} \quad 2s\alpha\|v_n\|^2 \leqslant 2\beta' < \alpha'.$$

Ora, de (3.22) e da desigualdade de Hölder, tem-se que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)w_n \cdot \nabla F(w_n)\,dx \leqslant \varepsilon \lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|v_n|^2\,dx\right)\\
&+ C\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w_n|^r\,dx\right)^{1/r}\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{s\alpha|w_n|^2} - 1)\,dx\right)^{1/s},
\end{aligned}$$

e de (3.23),

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{s\alpha|w_n|^2}-1)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2s\alpha u_n^2}-1)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{2s\alpha v_n^2}-1)\,dx < \infty.$$

Pelo Lema 3.2.3, a menos de subsucessão, tem-se que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|u_n|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|v_n|^2\,dx\right) = 0,$$

donde se conclui que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)w_n \cdot \nabla F(w_n)\,dx = 0.$$

Logo, por (3.26), obtém-se

$$\lim_{n\to\infty}\|w_n\|_Z^2 = 0,$$

que contradiz (3.29). Portanto, w_0 é uma solução fraca não nula do sistema (3.1). $\square$

Considere-se agora o problema que se segue

$$-\Delta w + V(|x|)w = \lambda Q(|x|)\nabla F(w) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^2, \tag{3.30}$$

onde F é uma função ímpar e λ um parâmetro positivo. Em [2] obtém-se o seguinte resultado de multiplicidade de soluções para (3.30), onde se prova que o valor do parâmetro λ afecta o número de soluções.

Teorema 3.4.2. *Suponha-se* (V)*-*(Q)*. Se* F *for ímpar e* (F_{α_0})*-*(F_4) *forem satisfeitas, então para cada* $k \in \mathbb{N}$ *existe* $\Lambda_k > 0$ *tal que o sistema (3.30) tem pelo menos* $2k$ *pares de soluções fracas não triviais em* Z *desde que* $\lambda > \Lambda_k$*.*

O funcional associado ao sistema (3.30) é

$$I_\lambda(w) = \frac{1}{2}\|w\|_Z^2 - \lambda \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx, \qquad w \in Z,$$

que, pelo Lema 3.3.1, está bem definido e é de classe C^1, com derivada dada por

$$I'_\lambda(w)z = \langle w, z\rangle_Z - \lambda \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)z \cdot \nabla F(w)\,dx, \qquad \forall\, w, z \in Z.$$

Logo, uma solução fraca $w \in Z$ do sistema (3.30) é um ponto crítico de I_λ. Este resultado é baseado na seguinte versão Teorema da Passagem da Montanha Simétrico (cf. Teorema A.4.2)

Teorema 3.4.3. *(Cf. [6]). Seja* $X = X_1 \oplus X_2$*,* X *um espaço de Banach real e* X_1 *de dimensão finita. Suponha-se que* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *é um funcional que satisfaz as seguintes condições:*

(J_1) $J(0) = 0$ *e* J *é par;*

(J_2) *existem* $\tau, \rho > 0$ *tais que* $J(u) \geqslant \tau$ *se* $\|u\|_X = \rho$*,* $u \in X_2$*;*

(J_3) *existe um subespaço* $W \subset X$ *de dimensão finita com dim*$(X_1) <$*dim*(W) *e existe* $\mathcal{S} > 0$ *tal que* $\max_{u \in W} J(u) \leqslant \mathcal{S}$*;*

(J_4) J *satisfaz a condição* $(PS)_c$ *para todo* $c \in (0, \mathcal{S})$*.*

Então J *tem pelo menos dim*$(W)-$*dim*(X_1) *pares de pontos críticos não triviais.*

Dado $k \in \mathbb{N}$, vai-se aplicar este resultado com $X = Z$, $X_1 = \{0\}$ $J = I_\lambda$ e $W = \widetilde{W} \times \widetilde{W}$ com $\widetilde{W}$ =span$\{\psi_1, ..., \psi_k\}$, onde $\{\psi_i\}_{i=1}^k \subset C_{0,rad}^\infty(\mathbb{R}^2)$ é uma família de funções suaves com suportes disjuntos. É imediato ver que $I_\lambda(0) = 0$ e, como F é ímpar, então I_λ é par, portanto, I_λ satisfaz (J_1).

Por cálculos análogos aos da demonstração de $i)$ do Lema 3.3.2, pode-se também concluir que I_λ satisfaz (J_2).

Por (F_4), note-se que,

$$\begin{aligned}
\max_{w\in W} I_\lambda(w) &= \max_{w\in W}\left[\frac{1}{2}\|w\|_Z^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx\right]\\
&\leqslant \max_{w\in W}\left[\frac{1}{2}\|u\|_{\widetilde{W}}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_{\widetilde{W}}^2 - \frac{\mu\lambda}{\nu}\|u\|_{L^\nu(\mathbb{R}^2;Q)}^\nu - \frac{\mu\lambda}{\nu}\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^2;Q)}^\nu\right]\\
&\leqslant \max_{u\in\widetilde{W}}\left[\frac{1}{2}\|u\|_{\widetilde{W}}^2 - \frac{\mu\lambda}{\nu}\|u\|_{L^\nu(\mathbb{R}^2;Q)}^\nu\right] + \max_{v\in\widetilde{W}}\left[\frac{1}{2}\|v\|_{\widetilde{W}}^2 - \frac{\mu\lambda}{\nu}\|v\|_{L^\nu(\mathbb{R}^2;Q)}^\nu\right].
\end{aligned}$$

Ora, tem-se que $\dim(\widetilde{W}) = k$, pelo que todas as normas neste espaço são equivalentes, logo existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\max_{w\in W} I_\lambda(w) \leqslant \max_{u\in\widetilde{W}}\left[\frac{1}{2}\|u\|_{\widetilde{W}}^2 - \frac{\mu\lambda}{C\nu}\|u\|_{\widetilde{W}}^\nu\right] + \max_{v\in\widetilde{W}}\left[\frac{1}{2}\|v\|_{\widetilde{W}}^2 - \frac{\mu\lambda}{C\nu}\|v\|_{\widetilde{W}}^\nu\right] = M_k(\lambda).$$

Considerando a função $g(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{\lambda\mu}{\nu C}t^\nu$, o seu máximo é atingido quando $t - \frac{\lambda\mu}{C}t^{\nu-1} = 0$, isto é, $t = \left(\frac{C}{\lambda\mu}\right)^{1/(\nu-2)}$, donde se conclui

$$M_k(\lambda) = \frac{\nu-2}{\nu}\left(\frac{C}{\mu}\right)^{2/(\nu-2)}\lambda^{2/(2-\nu)}.$$

Como $2/(2-\nu) < 0$ tem-se que

$$\lim_{\lambda\to+\infty} M_k(\lambda) = 0.$$

Então existe $\Lambda_k > 0$ tal que

$$M_k(\lambda) < \frac{\alpha'}{4\alpha_0} = \mathcal{S},$$

para qualquer $\lambda > \Lambda_k$ logo, I_λ satisfaz (J_3).

Estamos então nas condições do Lema 3.3.3. Assim, dada (w_n) nas condições (3.28), (w_n) é limitada em Z portanto, a menos de uma subsucessão, $w_n \rightharpoonup w$ em Z. Veja-se primeiro que

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)w\cdot\nabla F(w_n)\,dx \to \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)w\cdot\nabla F(w)\,dx \quad \text{quando} \quad n\to\infty. \tag{3.31}$$

De facto, como $C_{0,rad}^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E, para todo $\delta > 0$ existe $v \in C_{0,rad}^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ tal que $\|w-v\|_Z < \delta$. Agora, observando que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)w\cdot[\nabla F(w_n)-\nabla F(w)]\,dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(w-v+v)\cdot[\nabla F(w_n)-\nabla F(w)]\,dx\right| \leqslant$$
$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(w-v)\cdot\nabla F(w_n)\,dx\right| + \|v\|_\infty \int_{supp(v)} Q(|x|)|\nabla F(w_n)-\nabla F(w)|\,dx +$$
$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(w-v)\cdot\nabla F(w)\,dx\right|$$

e, usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, o facto de $|I'_\lambda(w_n)(w-v)| \leqslant \varepsilon_n\|w-v\|$ com $\varepsilon_n \to 0$ e o facto de (w_n) ser limitada em Z, tem-se

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(w-v)\cdot\nabla F(w_n)\,dx\right| \leqslant \varepsilon_n\|w-v\| + \|w_n\|\|w-v\| \leqslant C\|w-v\| < C\delta.$$

Analogamente, como $I'_\lambda(w_n) \to 0$ implica $I'_\lambda(w)(w-v)=0$, tem-se

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(w-v)\cdot\nabla F(w_n)\,dx\right| < C\delta.$$

Do Lema 3.3.3 tem-se

$$\lim_{n\to\infty}\int_{supp(v)} Q(|x|)|\nabla F(w_n)-\nabla F(w)|\,dx = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{supp(v)} Q(|x|)w\cdot[\nabla F(w_n)-\nabla F(w)]\,dx\right| < 2C\delta.$$

E como $\delta > 0$ é arbitrário, confirma-se (3.31). Assim, passando ao limite quando $n \to \infty$ em

$$o_n(1) = I'_\lambda(w_n)w = \langle w_n, w\rangle_Z - \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)w\cdot\nabla F(w_n)\,dx$$

e tendo em conta que $w_n \rightharpoonup w$ em Z, por (3.31) e (F_2) obtém-se

$$\|w\|_Z^2 = \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)w\cdot\nabla F(w)\,dx \geqslant 2\lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx.$$

Portanto

$$I_\lambda(w) = \frac{1}{2}\|w\|_Z^2 - \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx \geqslant 0. \tag{3.32}$$

Agora é preciso ver que $w_n \to w$. Há assim dois casos a considerar:

Caso 1: $w = 0$. Análogo a verificar que a solução w_0 obtida no Teorema 3.4.1 é não trivial, logo $w \neq 0$.

Caso 2: $w \neq 0$. Relembrando a demonstração da Proposição 2.3.5 e seguindo uma construção semelhante, define-se assim

$$z_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_Z} \quad \text{e} \quad z = \frac{w}{\lim_{n\to\infty}\|w_n\|_Z}.$$

Segue-se então que $z_n \rightharpoonup z$ em Z, $\|z_n\|_Z = 1$ e $\|z\|_Z \leqslant 1$. Se $\|z\|_Z = 1$ conclui-se a demonstração de forma análoga à da Proposição 2.3.5. Se $\|z\|_Z < 1$, vem do Lema 3.3.3 e de $I(w_n) \to c$ que

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\|w_n\|_Z^2 = c + \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx. \tag{3.33}$$

Pondo

$$A = \left(c + \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx\right)(1 - \|z\|_Z^2),$$

por (3.33) e, pela definição de z, tem-se

$$\begin{aligned}
A &= \left(c + \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx\right)\left(1 - \frac{\|w\|_Z^2}{\lim_{n\to\infty}\|w_n\|_Z}\right)\\
&= \left(c + \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx\right)\left(1 - \frac{\|w\|_Z^2}{2\left(c + \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx\right)}\right)\\
&= c - \frac{1}{2}\|w\|_Z^2 + \lambda\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)F(w)\,dx = c - I_\lambda(w).
\end{aligned}$$

Voltando a (3.33) e usando (3.32) conclui-se que

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\|w_n\|_Z^2 = \frac{A}{1-\|z\|_Z^2} = \frac{c - I_\lambda(w)}{1-\|z\|_Z^2} \leqslant \frac{c}{1-\|z\|_Z^2} < \frac{\alpha'}{4\alpha_0(1-\|z\|_Z^2)}.$$

Consequentemente, para $n \in \mathbb{N}$ grande o suficiente, existem $r > 1$ perto o suficiente de 1, $\alpha > \alpha_0$ perto o suficiente de α_0 e $\beta > 0$ tais que

$$r\alpha\|w_n\|_Z^2 \leqslant \beta < \frac{\alpha'}{2}(1-\|z\|_Z^2)^{-1}.$$

Logo, pelo corolário 3.2.1,

$$\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\alpha|w_n|^2} - 1)^r\,dx < +\infty. \tag{3.34}$$

De seguida, veja-se que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(w_n - w) \cdot \nabla F(w_n)\, dx = 0.$$

De facto, sejam $r, s > 1$ tais que $1/r + 1/s = 1$. Por (3.22) e aplicando a desigualdade de Hölder, conclui-se que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(w_n - w) \cdot \nabla F(w_n)\, dx \right| \\
&\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w_n - w||w_n|\, dx + C \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w_n - w|(e^{\alpha|w_n|^2} - 1)\, dx \\
&\leqslant \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w_n|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w_n - w|^2\, dx \right)^{1/2} \\
&+ C \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\alpha|w_n|^2} - 1)^r\, dx \right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)|w_n - w|^s\, dx \right)^{1/s}. \\
&\leqslant \varepsilon \|w_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2,Q)} \|w_n - w\|_{L^2(\mathbb{R}^2,Q)} + C\|w_n - w\|_{L^s(\mathbb{R}^2,Q)} \left(\int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(e^{\alpha|w_n|^2} - 1)^r\, dx \right)^{1/r}
\end{aligned}$$

Ora, do Lema 3.2.3, como $w_n \rightharpoonup w$, então $w_n \to w$ em $L^p(\mathbb{R}^2, Q)$, para $2 \leqslant p < \infty$. Deste facto em conjunto com (3.34) conclui-se a convergência. Tem-se assim que

$$I'_\lambda(w_n)(w_n - w) = o_n(1) \iff \langle w_n, w_n - w \rangle - \lambda \int_{\mathbb{R}^2} Q(|x|)(w_n - w) \cdot \nabla F(w_n) = o_n(1).$$

Observando que $\langle w_n, w_n - w \rangle = \|w_n\|_Z^2 - \langle w_n, w \rangle$, conclui-se assim que

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|_Z^2 = \|w\|_Z^2$$

e, portanto $w_n \to w$ em Z, logo I_λ satisfaz a condição (J_4).

Como I_λ está nas condições (J_1)-(J_4), o Teorema 3.4.2 resulta directamente do Teorema 3.4.3, ou seja, provou-se que existem pelo menos $2k$ soluções não triviais para o problema (3.30).

Bibliografia

[1] Adimurthi and K. Sandeep. A singular Moser-Trudinger embedding and its applications. *Nonlinear Differential Equations and Appl. 13*, 2007, 585-603.

[2] F. Albuquerque. Nonlinear Schrödinger elliptic systems involving exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$. *Electron. J. Differential Equations*, 2014.

[3] F. Albuquerque. *Uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser em espaços de Sobolev com pesos e aplicações.* Ph.D. Thesis, Universidade Federal da Paraíba, Universidade Federal de Campina Grande, 2014.

[4] F. Albuquerque, C. Alves, and E. Medeiros. Nonlinear Schrödinger equation with unbounded or decaying radial potentials involving exponential critical growth in $\mathbb{R}^2$. *J. Math. Anal. Appl. 409*, 2014, 1021-1031.

[5] A. Ambrosetti and A. Malchiodi. *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems.* Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] P. Bartolo, V. Benci, and D. Fortunato. Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity. *Nonlinear Anal. 7*, 1983, 981-1012.

[7] H. Brézis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, New York, 2011.

[8] H. Brézis and E. Lieb. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc. 88*, 1983, 486-490.

[9] H. Brézis and L. Nirenberg. Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents. *Comm. Pure and Appl. Math. 36*, 1983, 437-477.

[10] D. de Figueiredo, J. do Ó, and B. Ruf. Elliptic equations and systems with critical Trudinger-Moser nonlinearities. *Discrete Contin. Dyn. Syst. 30*, 2011, 455-476.

[11] D. de Figueiredo, O. Miyagaki, and B. Ruf. Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range. *Calc. Var. 3*, 1995, 139-153.

[12] J. do Ó, E. Medeiros, and U. Severo. A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two. *J. Math. Anal. Appl. 345*, 2008, 286-304.

[13] I. Fonseca and W. Gangbo. *Degree Theory in Analysis and Applications.* Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, NewYork: Oxford University Press, 1986.

[14] S. Kesevan. *Symmetrization and Applications.* World Scientific, 2006.

[15] P.L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations, Part I. *Rev. Mat. Iberoamericana 1*, 1985, 145-201.

[16] A. Machado. *Medida e integração.* Textos de Matemática, Universidade de Lisboa, Faculdade de Ciências, Departamento de Matemática, 2011.

[17] J. Moser. A sharp form of an inequality by N. Trudinger. *Indiana Univ. Math. J. 20*, 1970/71, 1077-1092.

[18] P. Rabinowitz. *Minimax methods in critical point theory with Applications to Differential Equations, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 65.* Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1986.

[19] B. Ruf. A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^2$. *J. Funct. Anal. 219*, 2005, 340-367.

[20] L. Sanchez. *Métodos da teoria de pontos críticos.* Colecção “Textos de Matemática”, volume 1, Departamento de Matemática da FCUL, 2002.

[21] W. A. Strauss. Existence of solitary waves in higher dimensions. *Comm. Math. Phys. 55*, 1977, 149-162.

[22] J. Su, Z.-Q. Wang, and M. Willem. Nonlinear Schrödinger equations with unbounded and decaying radial potentials. *Commun. Contemp. Math. 9*, 2007, 201-219.

[23] N.S Trudinger. On inbedding into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech. 17*, 1951, 473-484.

[24] Z.-Q. Wang and M. Willem. Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with remainder terms. *J. Funct. Anal. 203*, 2003, 550-568.

[25] M. Willem. *Minimax Theorems.* Birkhauser Verlag, 1996.

A. Apêndice

A.1. Espaços de Sobolev em $\mathbb{R}^N$

A Teoria dos espaços de Sobolev pode ser encontrada nos capítulos 8 e 9 de [7].
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado, com fronteira de classe C^∞, $N \geqslant 3$, $k \in \mathbb{N}$ e $1 < p < \infty$. Os espaços $W^{k,p}(\Omega)$ e $W_0^{k,p}(\Omega)$, munidos com a norma $\|\cdot\|_{k,p}$ são chamados espaços de Sobolev sobre Ω.

Teorema A.1.1. ***(Teorema das Imersões de Sobolev).*** *As seguintes imersões de Sobolev são contínuas:*

$$\begin{aligned}
&Se\ \frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0,\ então\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall\, q \in \left[1, \frac{Np}{N-kp}\right];\\
&Se\ \frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0,\ então\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall\, q \in [1, \infty);\\
&Se\ \frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0,\ então\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha,\lambda}(\overline{\Omega}),
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \lfloor k - N/p \rfloor$ e $\lambda \in (0,1)$ são tais que $\lambda < k - N/p - \alpha$. Em particular, a imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é contínua para todo $q \in [1, 2^*]$, onde $2^* = \frac{2N}{N-2}$.

As seguintes imersões de Sobolev são compactas:

$$\begin{aligned}
&Se\ \frac{1}{p} - \frac{k}{N} > 0,\ então\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall\, q \in \left[1, \frac{Np}{N-kp}\right);\\
&Se\ \frac{1}{p} - \frac{k}{N} = 0,\ então\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),\ \forall\, q \in [1, \infty);\\
&Se\ \frac{1}{p} - \frac{k}{N} < 0,\ então\ W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\alpha}(\overline{\Omega}),
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \lfloor k - N/p \rfloor$. Em particular, a imersão de Sobolev $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta para todo $q \in [1, 2^*)$.

A.2. Simetrização

Definição A.2.1. ***(Simetrização de Schwarz)*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então, a simetrização de Schwarz de u é a função $u^* : B_r \to \mathbb{R}$, onde $B_r \subset \mathbb{R}^N$ é a bola centrada na origem tal que $|B_r| = |\Omega|$, que verifica*

$$|\{x \in B_r : u^*(x) > c\}| = |\{x \in \Omega : u(x) > c\}| \text{ para todo } c \geqslant 0.$$

Algumas propriedades da simetrização são:

- *u^* é radialmente simétrica e decrescente;*
- *Seja $f \in C(\mathbb{R})$, então $\displaystyle\int_{B_r} f(u^*)\,dx = \int_\Omega f(u)\,dx$;*
- ***A desigualdade de Pólya-Szegö([14]):***

$$\int_{B_r} |\nabla u^*|^2\,dx \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

Lema A.2.1. ***(Lema Radial)*** *Seja $N \geqslant 2$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ uma função radial. Então, existe uma função $U(x)$ contínua para $x \neq 0$ tal que $u(x) = U(x)$ q.t. $x \in \mathbb{R}^N$, tendo-se*

$$|U(x)| \leqslant C|x|^{(1-N)/2}\|u\|_{1,2} \text{ para } |x| > 1,$$

onde C só depende de N.

Demonstração. Cf. [21] □

A.3. Funcionais e Pontos Críticos; Teorema da Passagem da Montanha

Sejam $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional.

Definição A.3.1. *O funcional I diz-se semicontínuo inferiormente (s.c.i) se $I^{-1}(-\infty, C]$ é fechado para todo $C \in \mathbb{R}$. O funcional I diz-se sequencialmente s.c.i. se*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } E \Rightarrow I(u) \leqslant \liminf I(u_n).$$

Definição A.3.2. *Diz-se que o funcional I é derivável-Gâteaux em $u \in E$ se existir o limite*
$$I'(u)v := \lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv)-I(u)}{t},$$
para todo o $v \in E$. Se $I'(u)$ tiver a propriedade mais forte

$$I(u+v)-I(u) = I'(u)v + o(\|v\|), \qquad \|v\| \to 0,$$

diz-se que I é derivável-Fréchet em u.
Além disso, se A é um aberto de E, se para todo $u \in A$ o funcional I é derivável-Fréchet e $u \mapsto I'(u)$ é contínua, então $I \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Definição A.3.3. *Diz-se que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) em E, se $\forall\,(u_n) \subset E$ tal que $I(u_n)$ é limitada e $I'(u_n) \to 0$ tem uma subsucessão convergente.*

Diz-se que o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, $(PS)_c$, onde $c \in \mathbb{R}$, se $\forall\,(u_n) \subset E$ tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ tem uma subsucessão convergente.

Diz-se que o funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ fraca se $\forall\,(u_n) \subset E$ tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$ então c é valor crítico do funcional.

Teorema A.3.1. ***(Princípio Variacional de Ekeland)*** *Seja $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional s.c.i. em E, limitado inferiormente e não identicamente igual a $+\infty$. Sejam $\varepsilon > 0$ fixo e $u \in E$ tais que*
$$I(u) \leqslant \varepsilon + \inf_{x\in E} I(x).$$
Então existe $v \in E$ tal que

$$F(v) \leqslant F(u), \qquad \|v-u\| \leqslant 1,$$

e para todo $w \neq v$, $F(w) > F(v) + \varepsilon\|w-v\|$.

Demonstração. Cf. [25]. □

Teorema A.3.2. ***(Lema da deformação)*** *Suponha-se que I satisfaz (PS). Defina-se*

$$A_c := \{u \in E :\ I(u) \leqslant c\} \quad e \quad K_c := \{u \in E :\ I(u) = c \text{ e } I'(u) = 0\}.$$

Se $c \in \mathbb{R}$, $\overline{\varepsilon} > 0$ e V é uma vizinhança de K_c, então existem $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tais que

1. *$\eta(0, u) = u$ para todo $u \in E$;*

2. $\eta(t,u) = u$ *para todo* $t \in [0,1]$ *se* $I(u) \notin [c-\overline{\varepsilon}, c+\overline{\varepsilon}]$*;*

3. $\eta(t,u)$ *é um homeomorfismo de* E *em* E *para qualquer* $t \in [0,1]$*;*

4. $\|\eta(t,u) - u\| \leqslant 1$ *para quaisquer* $t \in [0,1]$ *e* $u \in E$*;*

5. $I(\eta(t,u)) \leqslant I(u)$ *para quaisquer* $t \in [0,1]$ *e* $u \in E$*;*

6. $\eta(1, A_{c+\varepsilon} \setminus V) \subset A_{c-\varepsilon}$*;*

7. Se $K_c = \emptyset$*, então* $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$*;*

8. Se I *é par, então* $\eta(t,u)$ *é ímpar em* u*.*

Demonstração. Cf. [5], [18], [20]. □

Teorema A.3.3. ***(Teorema da Passagem da Montanha)*** *Seja* $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ *que satisfaça* (PS)*. Suponha-se que* $I(0) = 0$ *e*

(I_1) *existem* $\rho, \alpha > 0$ *tais que* $I|_{\partial B_\rho} \geqslant \alpha$*;*

(I_2) *existe* $e \in E \setminus \overline{B_\rho}$ *tal que* $I(e) \leqslant 0$*.*

Então I *tem um valor crítico* $c \geqslant \alpha$*. Além disso,* c *pode ser caracterizado como*

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} I(u),$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : \ g(0) = 0, g(1) = e\}.$$

Demonstração. Cf. [5], [18], [20]. □

Observação A.3.1. *Os Teoremas A.3.2 e A.3.3 também são válidos se se assumir que* I *satisfaz* $(PS)_c$ *em vez de* (PS)*.*

Teorema A.3.4. ***(Teorema da Passagem da Montanha sem (PS))*** *Seja* $I \in C^1(E,\mathbb{R})$*. Suponha-se que existem* V *uma vizinhança limitada de 0 em* E *e* ρ *uma constante tais que:*

(I_1^*) $I(u) \geqslant \rho$ *para todo* u *na fronteira de* V*;*

(I_2^*) $I(0) < \rho$ *e* $I(v) < \rho$ *para algum* $v \notin V$*. Ponha-se*

$$c := \inf_{g\in\Gamma} \max_{w\in g} I(w) \geqslant \rho,$$

onde Γ *denota a classe de caminhos contínuos que unem 0 a* v*. Então existe uma sucessão* $(u_n) \in E$ *tal que*

$$I(u_n) \to c \text{ e } I'(u_n) \to 0.$$

Demonstração. Cf. [9] □

A.4. Genus; Teorema da Passagem da Montanha Simétrico

A Teoria do Genus pode ser encontrada em [13]. Seja E um espaço de Banach real e $\mathcal{S}$ a família dos conjuntos simétricos e fechados em $E \setminus \{0\}$.

Definição A.4.1. *Define-se o genus de* $A \in \mathcal{S}$*,* $\gamma(A)$*, como o menor inteiro* n *tal que existe* $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ *ímpar. Se tal inteiro não existe, põe-se* $\gamma(A) = \infty$*. Se* $A = \emptyset$*,* $\gamma(A) = 0$*.*

Observação A.4.1. *Se* $A \in \mathcal{S}$ *e* $\gamma(A) > 1$*, então* A *contém infinitos pontos distintos, pois se* A *fosse finito, poderia-se escrever* $A = B \cup (-B)$*, com* B *fechado e* $B \cap (-B) = \emptyset$*. Mas assim, tem-se a função*

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ -1, & x \in -B \end{cases}$$

que é ímpar e está em $C(A, \mathbb{R}^N \setminus \{0\})$*.*

Proposição A.4.1. *Sejam* $A, B \in \mathcal{S}$*. Então*

1. $\gamma(\{x, -x\}) = 1$ *se* $x \neq 0$*;*
2. *Se existe* $f : A \to B$ *contínua e ímpar,* $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$*;*
3. *Se* $A \subset B$*,* $\gamma(A) \leqslant \gamma(B)$*;*
4. $\gamma(A \cup B) \leqslant \gamma(A) + \gamma(B)$*;*
5. *Se* A *é compacto, tem-se* $\gamma(A) < \infty$ *e existe* $\delta > 0$ *tal que* $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$*.*

Demonstração. Cf. [10]. □

Observação A.4.2. *Observe-se que se* $\gamma(B) < \infty$*,* $\gamma(\overline{A \setminus B}) \geqslant \gamma(A) - \gamma(B)$*.*

Proposição A.4.2. *Se* $A \subset E$*,* Ω *é uma vizinhança de 0 em* $\mathbb{R}^k$ *e existe* $h \in C(A, \partial\Omega)$ *com* h *um homeomorfismo ímpar, então* $\gamma(A) = k$*.*

Demonstração. Cf. [10]. □

Proposição A.4.3. *Seja X um subespaço de E de codimensão k e $A \in \mathcal{S}$ com $\gamma(A) > k$. Então $A \cap X \neq \emptyset$.*

Demonstração. Cf. [10]. □

De seguida, apresentam-se duas versões do Teorema da Passagem da Montanha Simétrico. Na primeira, apresenta-se a prova, onde se usa o Genus (Teoria do Índice). Por outro lado, a demonstração da segunda versão faz uso da chamada Teoria do Pseudo-Índice, e não será apresentada, já que o assunto não foi estudado aquando da preparação para esta dissertação.

Teorema A.4.1. ***(Teorema da Passagem da Montanha Simétrico) [18]*** *Seja E um espaço de Banach de dimensão infinita e seja $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ um funcional par, que satisfaça (PS), e $I(0) = 0$. Se $E = V \oplus X$, com dim $V < +\infty$, e I satisfaz as seguintes condições:*

(I_1') existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geqslant \alpha$;

(I_2') para cada subespaço de dimensão finita $W \subset E$, existe $R = R(W)$ tal que

$$I \leqslant 0 \quad em \quad W \setminus B_R.$$

Então I admite uma sucessão ilimitada de valores críticos.

Demonstração. Seja $k = \dim V$ e $V = \text{span}\{e_1, ..., e_k\}$. Para $m \geqslant k$, escolha-se $e_{m+1} \notin \text{span}\{e_1, ..., e_m\} := E_m$. Sejam $R_m = R(E_m)$ e $D_m = B_{R_m} \cap E_m$. Considere-se

$$G_m = \{h \in C(D_m, E) : h \text{ é ímpar e } h|_{\partial B_{R_m} \cap E_m} = \text{id}\},$$

donde se conclui imediatamente que $G_m \neq \emptyset$, $\forall\, m$, pois id$\in G_m$. Considere-se ainda

$$\Gamma_j = \{h(\overline{D_m \setminus Y}) : h \in G_m, m \geqslant j, Y \in \mathcal{S}, \text{ e } \gamma(Y) \leqslant m - j\}.$$

Observe-se que Γ_j é a imagem das deformações de $D_m \setminus Y$ que não alteram a fronteira. Os conjuntos Γ_j possuem as seguintes propriedades:

1) $\boldsymbol{\Gamma_j \neq \emptyset}$ para todo $\boldsymbol{j \in \mathbb{N}}$.

Considerando $Y = \emptyset$, vem que $h(\overline{D_m}) \in \Gamma_j$, $\forall\, j$, o que prova 1).

2) $\boldsymbol{\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j}$.
Ora, se $m \geqslant j+1$, então $m \geqslant j$. Seja $Y \in \mathcal{S}$ tal que $\gamma(Y) \leqslant m-(j+1) = m-j-1 < m-j$. Assim, $h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_{j+1}$, logo $h(\overline{D_m \setminus Y}) \in \Gamma_j$, o que prova 2).

3) Se $\boldsymbol{\varphi \in C(E,E)}$ é ímpar e $\boldsymbol{\varphi = \mathrm{id}}$ sobre $\boldsymbol{\partial B_{R_m} \cap E_m}$ para todo $\boldsymbol{m \geqslant j}$, então $\boldsymbol{\varphi : \Gamma_j \to \Gamma_j}$.
Seja $A \in \Gamma_j$, então $A = h(\overline{D_m \setminus Y})$, com $Y \in \mathcal{S}$, $\gamma(Y) \leqslant m - j$, e $h \in G_m$. Ora, $\varphi \circ h : D_m \to E$ é ímpar e $\varphi \circ h|_{\partial B_{R_m} \cap E_m} = \varphi|_{\partial B_R \cap E_m} = \mathrm{id}$, logo $\varphi \circ h \in G_m$. Assim, $\varphi(A) = (\varphi \circ h)(\overline{D_m \setminus Y})$, logo $\varphi(A) \in \Gamma_j$, o que prova 3).

4) Se $\boldsymbol{F \in \Gamma_j}$, $\boldsymbol{Z \in \mathcal{S}}$ e $\boldsymbol{\gamma(Z) \leqslant s < j}$, então $\boldsymbol{\overline{F \setminus Z} \in \Gamma_{j-s}}$.
Seja $F \in \Gamma_j$, então $F = h(\overline{D_m \setminus Y})$ com $Y \in \mathcal{S}$, $\gamma(Y) \leqslant m - j$, e $h \in G_m$. Considere-se $Z \in \mathcal{S}$ tal que $\gamma(Z) \leqslant s < j$.
Veja-se que

$$\overline{F \setminus Z} = h(\overline{D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z))}). \tag{A.1}$$

Seja $b \in h(D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z)))$. Então $b = h(w)$ com $w \in D_m$ e $w \notin Y \cup h^{-1}(Z)$, isto é, $w \in D_m$ e $w \notin Y$ e $w \notin h^{-1}(Z)$. Logo, $b \in h(D_m) \subset F$ e $b \notin Z$, donde se conclui que $b \in F \setminus Z$.

Por outro lado, seja $b \in \overline{F \setminus Z}$. Então,

$$\begin{aligned}
&b \in h(\overline{D_m \setminus Y}) \wedge b \notin Z \iff b = h(w), w \in D_m \wedge w \notin Y \wedge b \notin Z \\
&\Rightarrow w \in D_m \wedge w \notin Y \wedge h^{-1}(w) \notin h^{-1}(Z) \Rightarrow w \notin (Y \cup h^{-1}(Z)) \\
&\Rightarrow w \in D_m \setminus (Y \cup h^{-1}(Z)) \Rightarrow b \notin h(D_m \setminus Y \cup h^{-1}(Z)).
\end{aligned}$$

Ora, $\gamma(Y \cup h^{-1}(Z)) \leqslant \gamma(Y) + \gamma(h^{-1}(Z)) \leqslant \gamma(Y) + \gamma(Z) \leqslant m - j + s = m - (j - s)$, logo $\overline{F \setminus Z} \in \Gamma_{j-s}$, o que prova 4).

Considere-se agora

$$c_j = \inf_{F \in \Gamma_j} \max_{u \in F} I(u), \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{A.2}$$

Vai-se ver que se $j > k = \dim V$, então c_j é um valor crítico de I. Comece-se por ver que

$$\text{Se } j > k \text{ e } B \in \Gamma_j, \text{ então } F \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset. \tag{A.3}$$

Demonstração. Ora, se $F \in \Gamma_j$, então $F = h(\overline{D_m \setminus Y})$ com $m \geqslant j$, $Y \in \mathcal{S}$, $\gamma(Y) \leqslant m-j$, e $h \in G_m$.

Seja $\mathcal{O} = \{x \in D_m : h(x) \in B_\rho\}$.
Como h é ímpar, $0 \in \mathcal{O}$. Seja $\mathcal{O}_0$ a componente conexa de $\mathcal{O}$ que contém 0. Assim,

$\mathcal{O}_0$ é uma vizinhança limitada e simétrica da origem em E_m logo, pelo genus da esfera, $\gamma(\partial\mathcal{O}) = m$.

Veja-se que

$$h(\partial\mathcal{O}) \subset \partial B_\rho. \tag{A.4}$$

Atendendo a (I_2'),

$$I(u) \leqslant 0 \;\forall\, u \in E_m \setminus B_{R_m}, \tag{A.5}$$

e por (I_1'), $I(u) \geqslant \alpha > 0 \;\forall\, u \in \partial B_\rho \cap X$ logo, se $m > k$, $X \cap E_m \neq \emptyset$ e, portanto,

$$I(u) \geqslant \alpha > 0, \;\forall\, u \in \partial B_\rho \cap X \cap E_m. \tag{A.6}$$

De (A.5) e (A.6), conclui-se que $\rho < R_m$. Agora, dado $x \in \partial\mathcal{O}_0$, suponha-se que $h(x) \in B_\rho$. Se $x \in D_m$, então existe uma vizinhança de x, $V(x)$ tal que $h(V(x)) \subset B_\rho$, logo $x \notin \partial\mathcal{O}_0$. Assim $x \in \partial D_m$. Ora $h(x) = x$ pois $h|_{\partial D_m} = \mathrm{id}$. Por um lado, $\|x\| = R_m$, por outro $\|x\| = \|h(x)\| < \rho \Rightarrow R_m < \rho$, absurdo. Logo, tem-se (A.4). □

Seja $j > k$ e $F \in \Gamma_j$. Por (A.3), $F \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset$, logo $\max_F I \geqslant \alpha > 0$, donde $c_j \geqslant \alpha > 0$.

Por outro lado, dado $\hat{E}$ subespaço de E tal que $\dim \hat{E} = j$, vem

$$K_R = \hat{E} \cap B_R \in \Gamma_j, \;(K_R \text{ compacto}),$$

donde vem

$$c_j \leqslant \max_{K_R} I < \infty.$$

Tem-se assim

$$0 < \alpha \leqslant c_j < \infty \qquad \forall\, j > k \tag{A.7}$$

Considerem-se agora as seguintes definições

$$K_c = \{u \in E : I'(u) = 0 \text{ e } I(u) = c\},$$

$$A_c = \{u \in E : I(u) \leqslant c\}.$$

Veja-se que

$$\text{Se } j > k \text{ e } c_j = ... = c_{j+p} = c, \text{ então } \gamma(K_c) \geqslant p + 1. \tag{A.8}$$

Observe-se em primeiro lugar que, como $\Gamma_{j+1} \subset \Gamma_j$ então $c_j \leqslant c_{j+1}$, para todo $j > k$. Por (A.7), tem-se que $I(0) = 0$ e $c \geqslant \alpha > 0$, logo $0 \notin K_c$ e como I é par, $K_c \in \mathcal{S}$ e por

(PS), K_c é compacto, donde vem $\gamma(K_c) < \infty$.

Suponha-se com vista a um absurdo que $\gamma(K_c) \leqslant p$. Assim, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(K_c)) = \gamma(K_c) \leqslant p$. Designe-se por $N = N_\delta(K_c)$.
Pelo lema de deformação, existem$\eta \in C([0,1] \times E, E)$, $\varepsilon > 0$ tais que $\eta(1,\cdot)$ é ímpar e $\gamma(1, A_{c+\varepsilon} \setminus N) \subset A_{c-\varepsilon}$.
Seja $F \in \Gamma_{j+p}$ tal que $\max_F I \leqslant c + \varepsilon$. Tem-se $F \in \Gamma_{j+p}$ e $\gamma(N) \leqslant p$ logo, por 4), $\overline{F \setminus N} \in \Gamma_{j+p-p=j}$.

Por definição de R_m, $I(u) \leqslant 0$ para todo $u \in \partial B_{R_m} \cap E_m$. Tomando $\overline{\varepsilon} = \frac{\alpha}{2}$ e $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ vem então que

$$I(u) \notin [c - \overline{\varepsilon}, c + \overline{\varepsilon}] \quad \forall\, u \in \partial B_{R_m} \cap E_m,$$

donde pelo Lema de deformação, $\eta(1,u) = u \;\forall\, u \in \partial B_{R_m} \cap E_m$. Assim, $\eta(1,\cdot)$ é uma deformação admissível. Tem-se $\overline{F \setminus N} \in \Gamma_j$ e $\eta(1,\cdot)$ admissível, logo, $\eta(1, \overline{F \setminus N}) \in \Gamma_j$.

Como $F \subset A_{c+\varepsilon}$, $\eta(1, \overline{F \setminus N}) \subset A_{c-\varepsilon}$, donde sai

$$\max_{\eta(1, \overline{F \setminus N})} I \leqslant c - \varepsilon,$$

donde $c < c - \varepsilon$, absurdo. Assim $\gamma(K_c) \geqslant p + 1$.

Se $p = 0$, $\gamma(K_c) \geqslant 1$, donde $K_c \neq \emptyset$ e, portanto, c é valor crítico.

Se $p \geqslant 1$, então $\gamma(K_c) \geqslant 2$ e K_c é infinito.
Temos assim (c_j) uma sucessão de valores críticos. Veja-se que a sucessão é ilimitada.

Ora, a sucessão (c_j) é crescente: $c_j \leqslant c_{j+1}$. Suponha-se que (c_j) é limitada.
Assim, existe $\overline{c}$ tal que $c_j \to \overline{c}$. Se $c_j = \overline{c}$ para j grande, então $\gamma(K_{\overline{c}}) = \infty$, o que é incompatível com o facto de $K_{\overline{c}}$ ser um conjunto compacto. Assim, $c_j < \overline{c}$.

Seja $\tilde{K} = \{u \in E : c_{k+1} \leqslant I(u) \leqslant \overline{c} \text{ e } I'(u) = 0\}$. $\tilde{K}$ é compacto, por (PS), pelo que $\gamma(\tilde{K}) = s$ e existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(\tilde{K})) = \gamma(\tilde{K})$=s.

Seja $s = \max\{s, k+1\}$. Usando o Lema de deformação com $c = \overline{c}$, $\overline{\varepsilon} = \overline{c} - c_s$, $\mathcal{O} = N_\delta(\tilde{K})$, existem ε e η tais que

$$\eta(1, A_{\overline{c}+\varepsilon} \setminus \mathcal{O}) \subset A_{\overline{c}-\varepsilon}.$$

Seja j tal que $c_j > \overline{c} - \varepsilon$ e considere-se $F \in \Gamma_{j+s}$ tal que $\max_F I \leqslant \overline{c} + \varepsilon$. Argumentando como anteriormente, $\overline{F \setminus \tilde{K}} \in \Gamma_j$, pois $F \in \Gamma_{j+s}$ e $\gamma(\tilde{K}) = s$, e como $\eta(1,\cdot)|_{\partial B_r \cap E_m} = \mathrm{id}$ para todo $m \geqslant j$, então $\eta(1, \overline{F \setminus \tilde{K}}) \in \Gamma_j$.

Assim, $cj \leqslant \max_{\eta(1, F \setminus \tilde{K})} I \leqslant \overline{c} - \varepsilon < c_j$, um absurdo. Logo, $c_j \to +\infty$. $\square$

Teorema A.4.2. ***Teorema da Passagem da Montanha Simétrico - versão $\mathbb{Z}_2$ ([6], Theorem 2.4)***

Sejam H um espaço de Hilbert e $I \in C^1(H, \mathbb{R})$ um funcional. Se I satisfizer as seguintes condições:

(I_1'') *I satisfaz a condição (PS) em $]0, +\infty[$, e $I(0) \geqslant 0$;*

(I_2'') *existem dois subespaços fechados de H, H^+ e H^-, com codim $H^+ < +\infty$, e duas constantes $c_\infty > co > I(0)$ tais que*

i) $I(u) \geqslant c_0 \;\; \forall\, u \in \partial B_\rho \cap H^+$

ii) $I(u) < c_\infty \;\; \forall\, u \in H^-$;

(I_3'') *I é par.*

Então, se dim $H^- \geqslant$ codim H^+, I tem pelo menos $m =$ dim H^- $-$ codim H^+ pares distintos de pontos críticos.

A.5. Outros Resultados

Teorema A.5.1. ***(Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Sejam (f_n) uma sucessão de funções mensuráveis tais que $f_n(x) \to f(x)$, q.t. $x \in \Omega$ e g uma função mensurável tal que $\int_\Omega g(x)\, dx < \infty$ e $f_n(x) < g(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e q.t. $x \in \Omega$. Então*

$$\int_\Omega f_n(x)\, dx \to \int_\Omega f(x)\, dx.$$

Demonstração. Cf. [16]. □

Teorema A.5.2. ***(Teorema da Convergência Monótona)*** *Sejam (f_n) uma sucessão de funções mensuráveis que é crescente, isto é, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, tais que $f_n(x) \to f(x)$, q.t. $x \in \Omega$. Então*

$$\int_\Omega f_n(x)\, dx \to \int_\Omega f(x)\, dx.$$

Demonstração. Cf. [16]. □

Teorema A.5.3. ***(Teorema da Representação de Riesz)*** *Seja H um espaço de Hilbert munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $I : E \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo. Então existe $v \in H$ tal que*

$$I(u) = \langle u, v \rangle, \;\; \forall\, u \in H.$$

Demonstração. Cf. [7]. □

Teorema A.5.4. ***(Teorema de Ascoli-Arzelá - "versão L^p")*** *Seja $\mathcal{F}$ um conjunto limitado em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leqslant p < \infty$ e suponha-se que*

$$\lim_{|h|\to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0 \text{ uniformemente em } f \in \mathcal{F},$$

isto é, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $\|f(x+h) - f(x)\|_p < \varepsilon \;\forall\, f \in \mathcal{F}$, $\forall\, h \in \mathbb{R}^N$ com $|h| < \delta$. Suponha-se ainda que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitado e mensurável tal que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N \setminus \Omega)} < \varepsilon \;\forall\, f \in \mathcal{F}.$$

Então $\mathcal{F}$ está compactamente imerso em $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Cf. [7]. □

Teorema A.5.5. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $p, q \in [1, \infty]$ com $1/p + 1/q = 1$ e $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$. Então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg|\, dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Ao caso particular $p = q = 2$ chama-se desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Demonstração. Cf. [7]. □

Teorema A.5.6. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $a, b \geqslant 0$, $p \in (1, \infty)$ e q tal que $1/p + 1/q = 1$. Então*

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Demonstração. A demonstração é consequência do facto da função logarítmica ser côncava:

$$\log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) \geqslant \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log(ab).$$

□

Teorema A.5.7. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *Seja $1 \leqslant p < \infty$. Então, existe uma constante C que depende apenas de Ω e p tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_p \leqslant C \|\nabla u\|_p.$$

Demonstração. Cf. [7]. □

Teorema A.5.8. ***(Desigualdade de tipo Hardy)*** *Para todo $u \in H_0^1(B_1)$,*

$$\int_{B_1} |\nabla u|^2 \, dx \geqslant \frac{1}{4} \int_{B_1} \left[|x|^{-2} \left(\log \frac{1}{|x|} \right)^{-2} u^2 \right] dx.$$

Demonstração. Cf. [24] □

Lema A.5.1. ***(Lema de Brézis-Lieb, [8])*** *Considere-se a sucessão $(u_n) \in L^p(\Omega)$, com $p \in [1, \infty)$ tal que*

- *$\|u_n\|_p^p \leqslant C$, com $C \in \mathbb{R}$;*
- *$u_n \to u$ q.t. $x \in \Omega$.*

Então

$$\lim(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

O seguinte resultado é um recíproco do teorema da convergência dominada de Lebesgue no espaço $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Lema A.5.2. *([12]) Seja (u_n) uma sucessão em $H^1(\mathbb{R}^2)$ fortemente convergente. Então existem uma subsucessão (u_{n_k}) de (u_n) e $g \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tais que $|u_{n_k}(x)| \leqslant g(x)$ q.t. $x \in \mathbb{R}^2$.*

Demonstração. Seja (u_n) uma sucessão em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Em particular, $u_n \to u$ q.t. $x \in \mathbb{R}^2$. Além disso, pode-se extrair uma subsucessão (u_{n_k}) de (u_n) que se denota por (u_k) tal que para todo $k \geqslant 1$,

$$\|u_{k+1} - u_k\| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Pondo

$$w_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |u_{k+1}(x) - u_k(x)|,$$

vem que $w_n \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $\|w_n\|_{1,2} \leqslant 1$. Consequentemente

$$\|w_n\|_2 \leqslant 1 \quad \text{e} \quad \|\nabla w_n\|_2 \leqslant 1.$$

Pelo teorema da convergência monótona, $w_n \to w$ q.t. $x \in \mathbb{R}^2$ para algum $w \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Além disso, usando o teorema da convergência dominada de Lebesgue tem-se que $\|w_n -$

$w\|_2 \to 0$. Desta convergência em $L^2(\mathbb{R}^2)$ e, do facto de $|\nabla w_n|$ ser limitada em $L^2(\mathbb{R}^2)$, pode-se concluir que $w \in H^1(\mathbb{R}^2)$. Agora, para $l > k \geqslant 2$, tem-se

$$|u_l(x) - u_k(x)| \leqslant |u_l(x) - u_{l-1}(x)| + ... + |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leqslant w_{l-1}(x) - w_{k-1}(x),$$

e tomando $l \to \infty$ obtém-se, para qualquer $k \geqslant 2$, que

$$|u(x) - u_k(x)| \leqslant w(x) \quad \text{q.t.} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Logo

$$|u_k(x)| \leqslant g(x) \quad \text{q.t.} \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

com $g = |u| + w \in H^1(\mathbb{R}^2)$, o que completa a demonstração. □

Lema A.5.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então para qualquer sucessão (u_n) em $L^1(\Omega)$ tal que*

$$u_n \to u \quad \textit{em} \quad L^1(\Omega), \qquad f(u_n) \in L^1(\Omega) \qquad \textit{e} \qquad \int_\Omega |f(u_n)u_n|\, dx \leqslant C,$$

a menos de subsucessão tem-se $f(u_n) \to f(u)$ em $L^1(\Omega)$.

Demonstração. Cf. [11] □